Lycée : Mohamed Ali **Profs : Fourati Ali et Derbel Louati Nada**	**Devoir de synthèse N°1** *Épreuve: Mathématiques*	**Date : 13/12/2024** **Durée : 2 h** **Classe: 3ième Tech 1et2**

Exercice1 : (3 p)

Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées mais une seule est exacte. Indiquer le numéro de la question et recopier la réponse exacte avec justification

1°/ Une fonction f *dérivable en* 1 *tel que* $T: y = \frac{3}{2}x + 1$ *est la tangente à sa courbe au point d'abscisse* 1, *on a :*

a) $f(1) = \frac{3}{2}$; ***b)*** $f(1) = \frac{5}{2}$; ***c)*** $f(1) = 1$

2°/ Soit $x \in \mathbb{R}$, *tel que* $\cos x = 0{,}3$ *on a :*

a) $\cos 2x = 0{,}6$; ***b)*** $\cos 2x = -0{,}6$; ***c)*** $\cos 2x = -0{,}82$

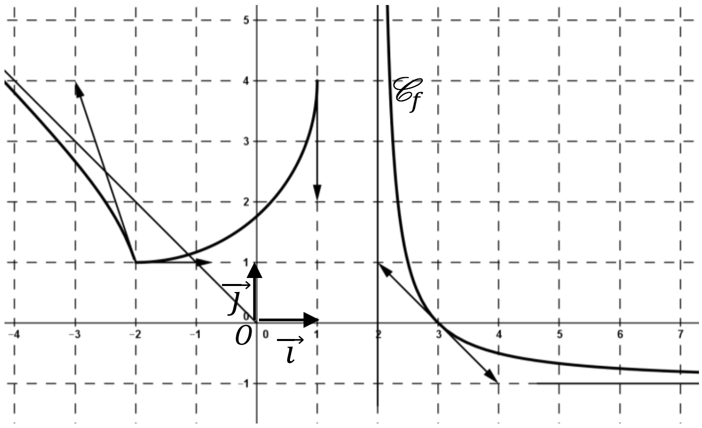
3°/ Soit ABC un triangle, alors :

a) $\cos \hat{A} = -\cos(\hat{B} + \hat{C})$; ***b)*** $\cos \hat{A} = \cos(\hat{B} + \hat{C})$; ***c)*** $\cos \hat{A} = \pi - \cos(\hat{B} + \hat{C})$

Exercice2 : (6 pts)

On donne dans la figure ci-contre $\mathscr{C}_f$ *la représentation graphique dans un repère orthonormé* $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ *d'une fonction* f

(Les droites : $\Delta: y = -x$; $\Delta': y = -1$ *et* $\Delta'': x = 2$ *sont des asymptotes à* $\mathscr{C}_f$*)*



I. *Par lecture graphique*

1°/a- *Déterminer* D_f *l'ensemble de définition de la fonction* f

b- *Déterminer :* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

c- *Déterminer en justifiant :* $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + x]$ *et déduire* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

2°/a- *Déterminer en justifiant :* $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \frac{f(x)-1}{x+2}$; $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-4}{x-1}$ *et* $f'_g(-2)$

b- *La fonction* f *est-elle dérivable en* (-2)? *Justifier votre réponse.*

3°/ *Déterminer* $f'(3)$ *et une approximation affine de* $f(2{,}9)$.

II. *Soit la fonction g définie par* $g(x) = \sqrt{f(x)}$ *et* $\mathscr{C}_g$ *sa courbe représentative*

1°/ *Déterminer* D_g *l'ensemble de définition de* g

2°/a- *Montrer que pour tout pour* $x \in]-2,1[$, *on a :* $\frac{g(x)-2}{x-1} = \left(\frac{f(x)-4}{x-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}+2}\right)$

b- *En déduire* $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{g(x)-2}{x-1}$

c- *la fonction* g *est dérivable à gauche en* 1 *et interpréter graphiquement*

3°/a- *Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}$

b- *Interpréter graphiquement les résultats trouver.*

Exercice 3 : (5 pts)

Soit la fonction f *définie par* $f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2+2}{x} & si \quad x < -1 \\ 3 - \sqrt{x+1} & si\ x \geq -1 \end{cases}$ *et* $\mathscr{C}_f$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

1°/a*- Déterminer l'ensemble de définition de* f.

b*- Etudier la continuité de* f *en* (-1)

c*- Montrer que la fonction* f *est continue sur* $\mathbb{R}$

2°/a*-Montrer que la fonction* f *est dérivable à gauche en* (-1) *et déterminer* $f'_g(-1)$

b*- Etudier La dérivabilité de* f *à droite en* (-1).

c*- La fonction* f *est-elle dérivable en* (-1)? *Justifier et Interpréter graphiquement*

3°/a*- Montrer que pour tout* $x \in]-1;+\infty[\ \setminus \{3\}$,*on a :*$\frac{f(x)-1}{x-3} = \frac{-1}{\sqrt{x+1}+2}$

b*- Montrer* f *est dérivable en 3 et déterminer* $f'(3)$.

c*- Ecrire une équation de* T *la tangente à* $\mathscr{C}_f$ *au point d'abscisse* 3.

Exercice 4 : (6pts)

Soit $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x$ *, pour tout* $x \in \mathbb{R}$

1°/a*- Calculer* $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$

b*- Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$,*on a :* $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

c*- En déduire que :* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2°/a*- Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $f(x) = 0$.

b*- Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $f(x) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

3°/ *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$,*on a :* $f(x) = 4\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

4°/*Soit la fonction* g *définie par* $g(x) = \frac{f(x)}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$

a*- Déterminer* D_g *l'ensemble de définition de* g

b*- Montrer que :* $g\left(\frac{\pi}{12}\right) = -4(2-\sqrt{3})$

c*- Montrer que pour tout* $x \in D_g$ *,on a :* $g(x) = 4\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

d*- En déduire la valeur exacte de* $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$