L. R.F.B.Monastir		A.S :2023/2024
	Devoir de synthèse N°1	
Durée : 2.h	Mathématiques	Classes $3^{ème}$ sc.T

Nom et prénom : ....

Exercice N°1 : (6 pts)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x \prec 0 \\ x^2-3x+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x-1}-x & \text{si } x \succ 1 \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ Montrer que f est continue en 0 et en 1.

2/ Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement.

3/a) Montrer que f est dérivable à gauche en 1.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=+\infty$. Interpréter graphiquement.

4/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5/a) Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]1,+\infty[$.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]-\infty,0[$ et $x\in[0,1]$

c) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice N°2 : (4 pts)

On donne :

- $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.
- $\sin 2a=2\sin a\cos a$.
- $2\cos^2 a=1+\cos 2a$.

1/ Soit $f(x)=2+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

a) Calculer : $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

b) Montrer que : $2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$.

c) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $f(x)=4\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0,2\pi[$, l'équation : $f(x)=0$.

2/ On pose : $g(x)=\dfrac{2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{f(x)}$, pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{3}\right[$.

a) Montrer que pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{3}\right[$, on a : $g(x)=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

b) Calculer $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et déduire que $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$.

Exercice N°3 : (5 pts)

Dans la figure ci-contre :

- **ABC est un triangle équilatéral de côté 3 .**
- **Le point I est le milieu du segment $[AB]$.**
- **D est le symétrique de B par rapport à C .**

1/ a) Vérifier que ABD est un triangle rectangle en A .

b) En déduire que : $AD = 3\sqrt{3}$.

2/ Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$.

3/ a) Montrer que pour tout point M du plan, on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{9}{2}$

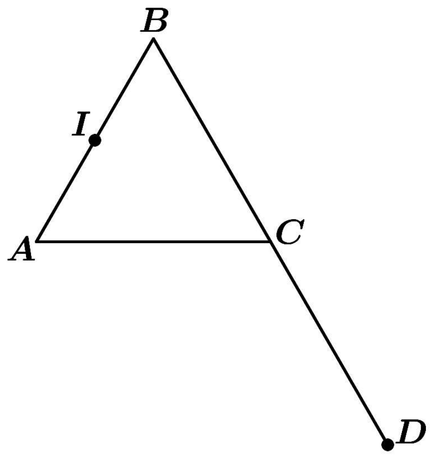
b) Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma_1 = \left\{ M \in P \text{ tel que } MA^2 + MB^2 = \frac{17}{2} \right\}$

4/ Soit l'ensemble $\Gamma_2 = \left\{ M \in P \text{ tel que } MB^2 - MD^2 = 36 \right\}$

a) Montrer que pour tout point M du plan, on a : $MB^2 - MD^2 = 2\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{DB}$

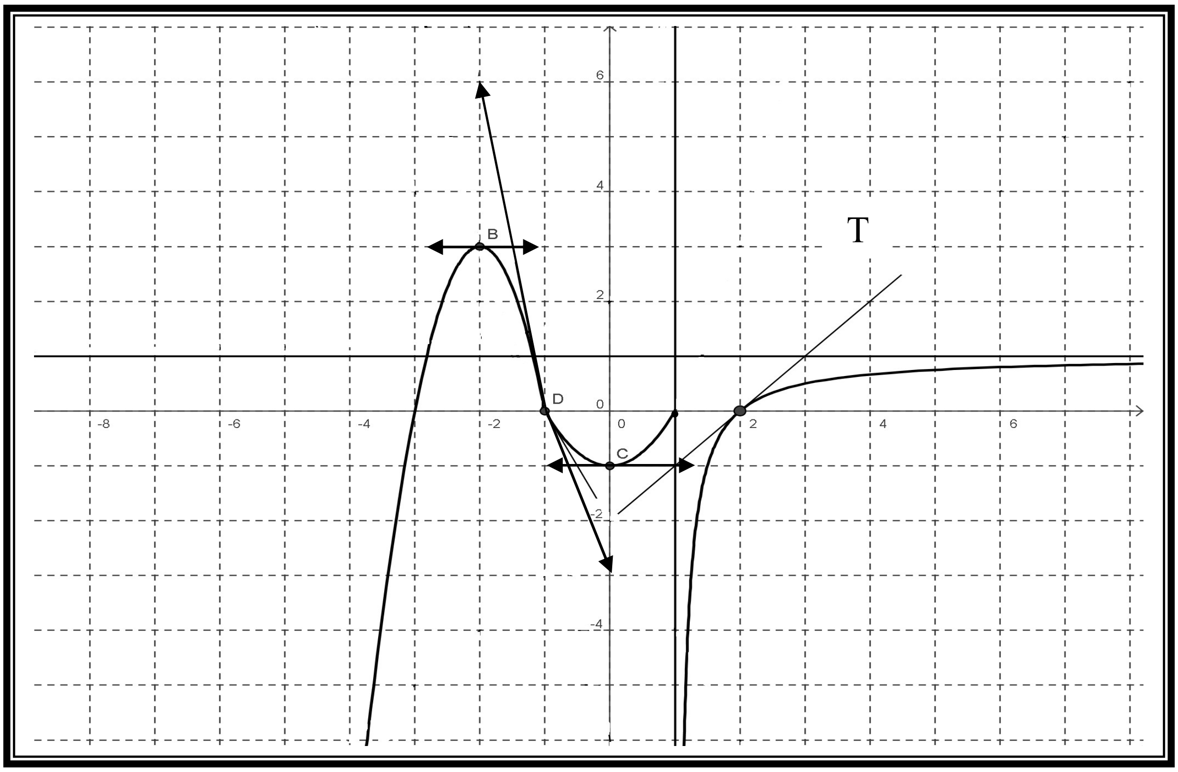
b) Calculer $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}$. Déduire que $D \in \Gamma_2$

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 .



Exercice N°4 :(5 pts)

La courbe ζ_g ci-dessous représente une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.



Par lecture graphique compléter

1/a) Le domaine de continuité de g est :........

b) $\lim\limits_{x\to--\infty} g(x) = ...$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = ...$; $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = ...$

c) $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{g(x)}{x+1} = ...$; $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{g(x)}{x+1} = ...$; $g'(2) = ...$; $g'(-2) = ...$; $g'(0) = ...$

2/ Le domaine de dérivabilité de g est : …………………

3/ Déterminer une équation cartésienne de la tangente T au point d'abscisse 2.

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

4/ Donner le tableau de signe de $g(x)$ sur son domaine de définition.

x	
g (x)	

5/ Soit la fonction *G* définie sur $]-\infty, 0]$ vérifiant $G'(x) = g(x)$.

Donner les variations de *G*.

x	
G '(x)	
G(x)	

6/ Donner le tableau de variation de g.

x	
g'(x)	
g(x)	