Epreuve : MATHEMATIQUES	**Devoir de synthèse N°1** ****************************** **Sujet commun**	**Commissariat régional Tunis 1**
13 Décembre 2023	**Durée : 2 h**	**Niveau : 3ème Année** ************ **Section: Sciences techniques**

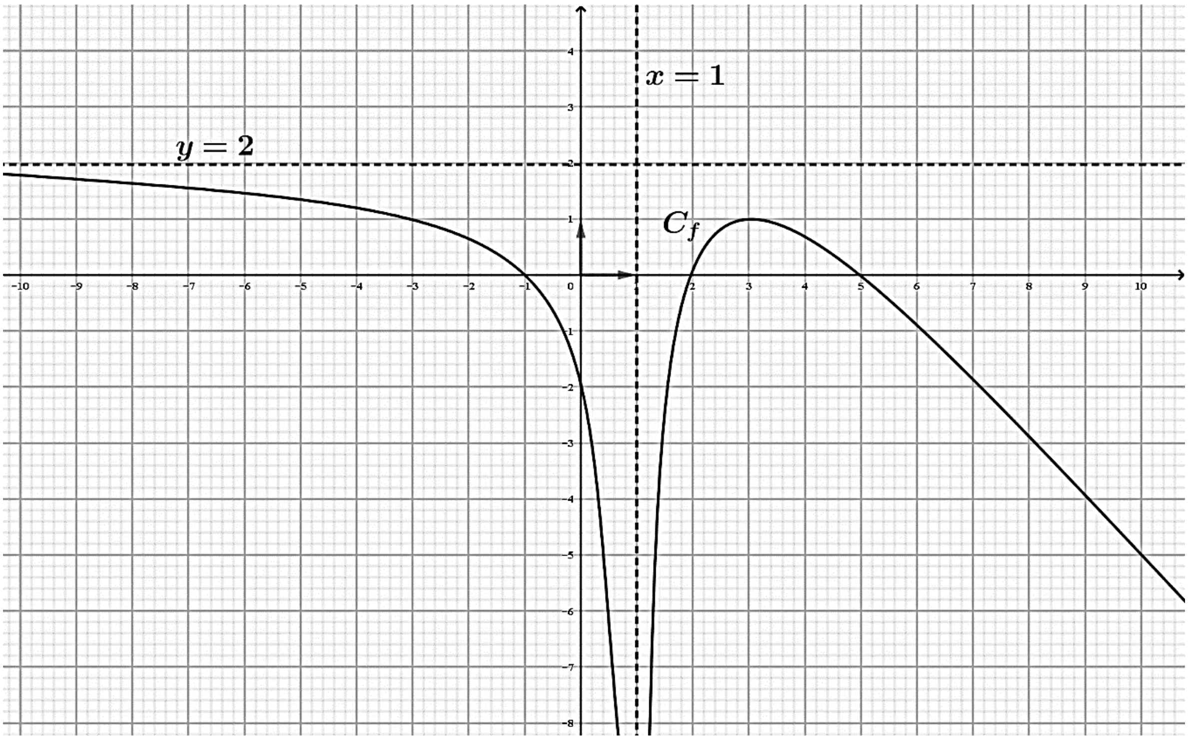
Le sujet comporte 4 pages dont l'annexe page 4 est à rendre avec la copie.

<u>Exercice N°1:</u> (4,5 points)

Dans le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé, la courbe (C_f) représentative d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

La droite d'équation y = 2 est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

La droite d'équation x = 1 est une asymptote verticale à (C_f)



Répondre par une lecture graphique aux questions suivantes:

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$,

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{f(x)-2}\right)$, $\lim\limits_{x\to5^+}\frac{2}{f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to(-1)}\left|\frac{x}{f(x)}\right|$

2) a) Déterminer le nombre des solutions de l'équation : $|f(x)| = 1$

   b) Donner les variations de $|f|$ sur son ensemble de définition

3) Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{1}{\sqrt{-f(x)}}$

   a) Déterminer l'ensemble de définition de h

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$, $\lim\limits_{x\to1} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^-} h(x)$

   c) Déterminer le nombre des solutions de l'équation $h(x) = 2$

Exercice N°2: (6 points)

A) On considère la fonction *f* définie sur IR, par : $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$

1) Justifier que f est continue sur IR.

2) Montrer que f admet un maximum en $x = 1$

   a) Vérifier que pour tout $x \in$ IR, $f(x) + \frac{1}{6} = \frac{(x+3)^2}{6(x^2+3)}$;

   b) En déduire que f admet un minimum que l'on précisera

3) a) Vérifier que pour tous réels a et b, on a : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{3-a-b-ab}{(a^2+3)(b^2+3)}$

   b) En déduire que f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$

B) Soit *g* la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \frac{x+1}{x^2+3} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de *g*.

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

2) Etudier la continuité de *g* en 1.

3) Déterminer les intervalles sur lesquels *g* est continue

Exercice N°3: (5 points)

1) On considère l'expression : $f(x) = \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

   a) Calculer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

   b) Résoudre dans $]-\pi,\pi[$, l'équation $f(x) = 0$.

2) a) Montrer que : $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

   b) En déduire que $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$

3) Vérifier que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^2$; En déduire $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

4) Soit $h(x) = \frac{f(x)}{2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$.

   a) Déterminer D_h l'ensemble de définition de h .

   b) Montrer que pour tout $x \in D_h$: $h(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

   c) Résoudre dans $]-\pi,\pi[$, l'inéquation $h(x) \geq \frac{1}{2}$.

Exercice N°4: (4,5 points)

Le plan étant orienté dans le sens direct.

On désigne par *ABC* un triangle isocèle de sommet principal A inscrit dans un cercle **($\mathscr{C}$)** de centre O tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{67\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **(Figure 1)**

1) a) Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

   b) Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})$.

2) Soit le point *D* du plan tel que : $AD = AB$ et $(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}) = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

a) Vérifier que le triangle *BCD* est rectangle en *B*, et placer le point D.

b) Montrer que *A* est le centre du cercle ζ circonscrit au triangle *BCD*.

c) Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

3) La droite *(AO)* recoupe **(**$\mathcal{C}$**)** en *E*.

Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$.

4) Déterminer l'ensemble *Δ* des points M du plan vérifiant :

$$(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{CA}}) = (\widehat{\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{AD}}) + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z}.$$

Annexe à rendre avec la copie
Nom .... Prénom …………........... .... Classe : .... N°.......

Exercice N°4 :

Figure 1