Lycée Mohamed Ali	Devoir de Synthèse : N°1	Date : 15/12/2023
$3^{ème}$ Sciences- Exper		Durée : 2 heures

Exercice 1 : (4pts)

Soit $f(x) = \sqrt{2}\,sin(2x) + \sqrt{2}\,cos(2x) - \sqrt{2}$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$

1°/ *Calculer* $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *et* $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

2°/a- *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$ $f(\pi + x) = f(x)$

b- *En déduire* $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

3°/ a- *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 2\ \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}$

b- *En déduire la valeur exacte de* $\sin\frac{7\pi}{12}$

4°/ a-*Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a :* $f(x) = 2\sqrt{2}\sin x\,(\cos x - \sin x)$

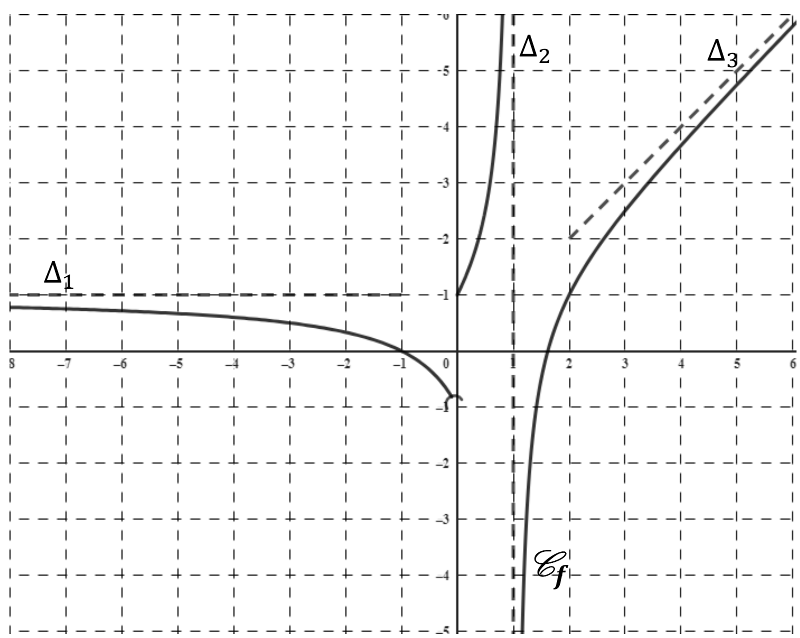
b- *En déduire que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a :* $f(x) = 4\sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

5°/*Soit* $g(x) = \cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; $x \in \mathbb{R}$. *Montrer que* $f(x).\,g(x) = \frac{1}{2}\sin(4x)$

Exercice 2 : (6pts)

On donne $\mathscr{C}_f$ *la représentation graphique dans un repère orthonormé* $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ *d'une fonction* f.

Les trois droites $\Delta_1 : y = 1$; $\Delta_2 : x = 1$ *et* $\Delta_3 : y = x$ *sont les asymptotes à* $\mathscr{C}_f$



I. Par lecture graphique

1°/a- *Déterminer* D_f *l'ensemble de définition de la fonction* f

b- *Déterminer les intervalles où la fonction* f *est Continue*

2°/a- *Déterminer* : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b- *Déterminer* : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

c- *Déterminer en justifiant la réponse :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{f(x)-x}$

II. *Soit la fonction* g *définie par* $g(x) = \begin{cases} f(x) - x + 1 & si\ \ x < 0 \\ \frac{x}{f(x)-x} & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$ *et* $\mathscr{C}_g$ *sa courbe représentative*

1°/*Montrer que la fonction* g *est continue en* 0.

2°/ *Montrer que la fonction* g *est prolongeable par continuité en* 1.

3°/*Montrer que* $\mathscr{C}_g$ *admet au voisinage de* $(-\infty)$*une asymptote oblique d'équation :*$y = -x + 2$

4°/*Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$. *Interpréter graphiquement le résultat.*

Exercice 3 : (6 pts)

Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+2x} & si \quad x\le -2\\ \frac{x^2+4x+4}{x^2-x-6} & si \quad x>-2\end{cases}$ *et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative*

1°/ Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2°/ a-Montrer que la fonction f est continue en -2 .

b- Montrer que la fonction f est continue sur D_f .

3°/a- Calculer $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ puis $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$. *Interpréter graphiquement le résultat.*

b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. *Interpréter graphiquement le résultat.*

4°/a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b- Montrer que la droite $\Delta: y=-x-1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $(-\infty)$

5°/a-Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet au moins une solution dans $]-3;-2[$

b- Déterminer la valeur exacte de α

Exercice 4 : *(4pts)*

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on donne OAB un triangle équilatéral direct tel que $A(2;0)$, $OBCD$ est un carré tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ **(Voir la figure ci-dessous)**

1°/ a- Déterminer les coordonnées polaires de B.

b- En déduire les coordonnées cartésiennes de B .

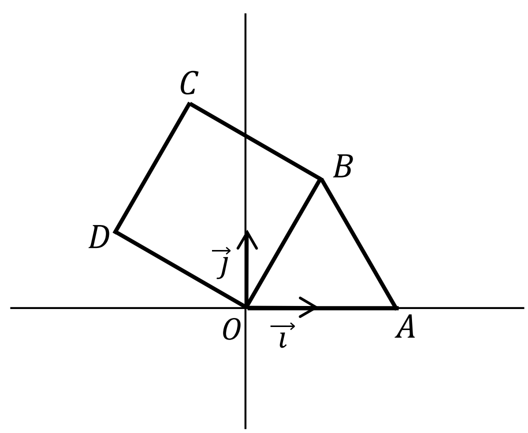
2°/ a- Déterminer les coordonnées polaires de D.

b- En déduire les coordonnées cartésiennes de D .

3°/ a- Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right)=\frac{7\pi}{12}[2\pi]$ et que $OC=2\sqrt{2}$

b- Déterminer les coordonnées cartésiennes de C .

c- En déduire les valeurs de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.



4°/soit un point M du plan tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CM}}\right)\equiv\frac{19}{12}[2\pi]$.

a- Déterminer la mesure principale de $\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CM}\right)$

a- Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{AB}}\right)$

b- En déduire la position relative des droites (CM) et (AB).