LYCEE ELHICHRIA

✧✧✧✧

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1

MATHÈMATIQUES

✧✧✧✧

Durée : 2H | Date : 10/12/2024

SECTION : $3^{ème}$ Sc

PROF : Mr Aloui Fethi

NB : Le sujet comporte 3pages.
La page 3 est une annexe à rendre avec la copie.

Exercice n°1 : (5points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

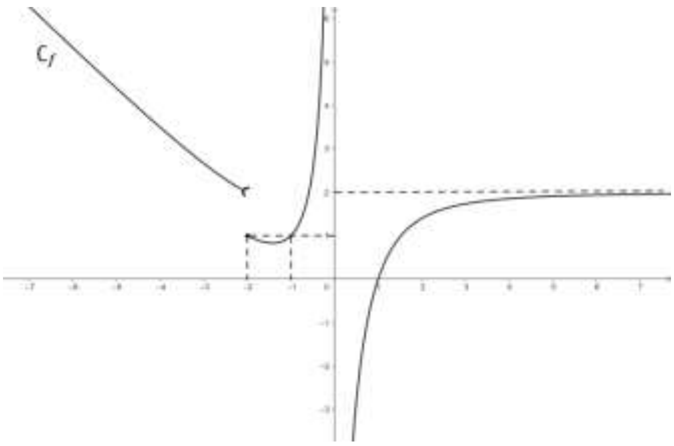
1) a/ Déterminer le domaine de définition de f
   b/ Justifier que f est continue sur son domaine de définition
   c) Montrer que pour tout $x \in [-3\ ,\ +\infty[\ \backslash \{1\}$ on a : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}$
2) a/ Calculer $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$
   b/ Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. En déduire que f est prolongeable par continuité en 1 et définir son prolongement
   c/ Montrer que l'équation $f(x) = 0{,}22$ admet au moins une solution $\boldsymbol{\alpha}$ dans $]3\ ,\ 4[$
3) Soit la fonction g définie par : $\begin{cases} \dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2} & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 4f(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

   On note C_g la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$
   a/ Montrer que g est continue en 1
   b/ Calculer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat
   c/ Calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat

Exercice n°2 : (5points)

Dans la figure ci-dessous on donne la courbe C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$

- La droite D : $y = 2$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$
- La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à C_f



1) a/ Déterminer : $f(-2)$; $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
   b/ f est-elle continue en (-2) ? Justifier la réponse
2) Déterminer : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$
3) a/ Dresser le tableau de variations de f sur $]-\infty, -2[$
   b/ Déterminer l'image par f de l'intervalle$]-\infty, -2[$

4) Soit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

a/ Déterminer : $\lim_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim_{x\to 0^-} g(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} g(x)$

b/ En déduire que g est prolongeable par continuité en 0

Exercice n°3 : (4points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j})$

On considère les points $A(-1, \sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}, 1)$ et $C(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1)$

Dans la **figure** de l'annexe on a tracé le cercle Ω de centre O et de rayon 2

1) a/ Determiner les coordonnées polaires des points A et B

   b/ Placer les points A et B

   c/ Calculer $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$

   d/ En déduire que le triangle OAB est isocèle et rectangle en O

2) a/Verifier que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

   b/Montrer que OBCA est un carré

   c/ Montrer que $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$

   d/ En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

Exercice n°4 : (6points)

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre ,

on considère un triangle ABC isocèle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

On désigne par I le milieu [BC] et par D le point de la droite (AB)

tel que $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{20\pi}{3} [2\pi]$ par E le point de la droite (AI)

tel que $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}}) \equiv \frac{-41\pi}{2} [2\pi]$

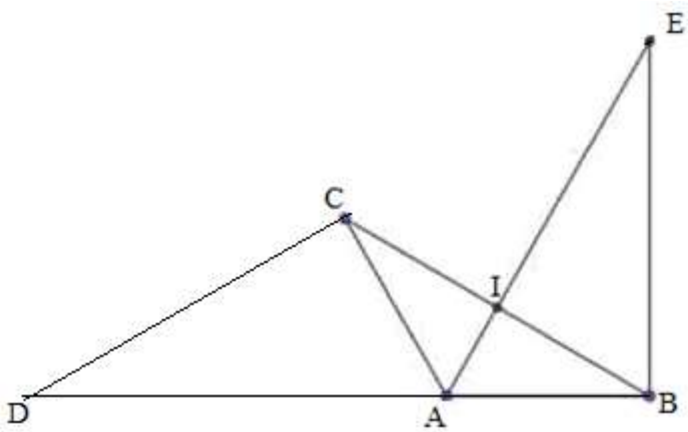
1) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$
2) Montrer que le triangle ABE est rectangle en B
3) a/ Montrer que le triangle BEC est isocèle en E

   b/ Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC})$

   c/ En déduire la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE})$
4) Déterminer la mesure principale de chacun des angles suivants :

   $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BE})$; $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{EC})$ et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BC})$
5) a/ Montrer que $\frac{2\pi}{3}$ est la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})$

   b/Montrer que les points D , C et E sont alignés



Annexe

Nom et prénom: . . . . Classe : $3^{ème}$ Sc_1