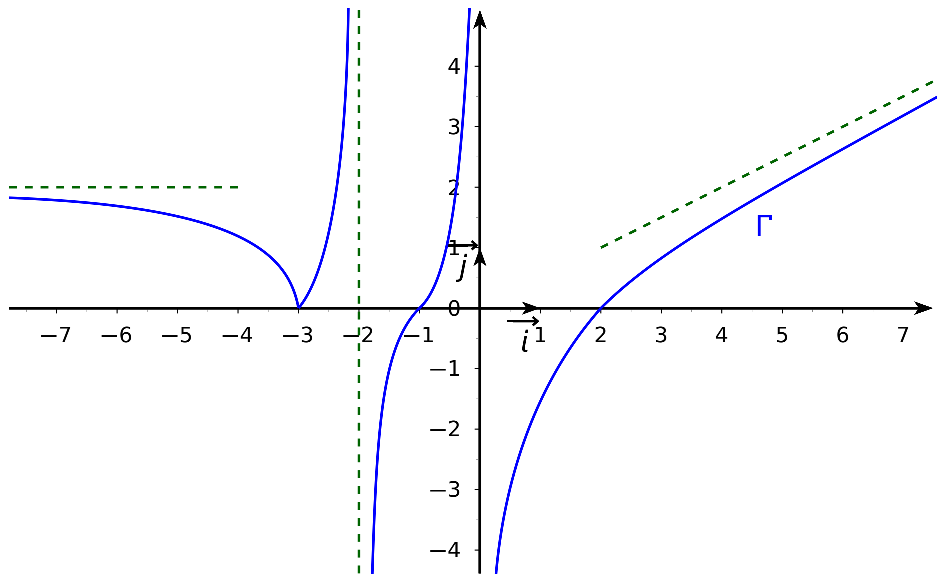
Exercice 1 *(4 points)*

Dans la figure ci-dessous :

- Γ est la courbe représentative d'une fonction f.
- Les droites d'équations respectives : $y=2$, $x=-2$, $x=0$ et $y=\dfrac{1}{2}x$ sont des asymptotes à la courbe Γ.



Par une lecture graphique :

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2024}{f(x)-2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2f(x)-x+1$.
2. Montrer que la fonction $\dfrac{1}{f}$ est prolongeable par continuité en 0 .
3. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 2 *(7 points)*

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-5,1\}$ par : $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x^2+4x-5} & \text{si } x\le 2\\ \sqrt{x^2+5}-2 & \text{si } x>2\end{cases}$.

Et on désigne par $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. a) La fonction g est-elle prolongeable par continuité en 1 ? justifier la réponse .
   b) Montrer que g est continue en 2 .
   c) Prouver que g est continue sur $]-\infty,2]\setminus\{-5,1\}$ et sur $]2,+\infty[$.
2. Montrer que l'équation $g(x)=2$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $]3,4[$.
3. a) Justifier que la droite d'équation $x=-5$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_g$.
   b) Vérifier que pour tout $x\in]-\infty,2]\setminus\{-5,1\}$, on a : $g(x)=x-4+\dfrac{21x-21}{x^2+4x-5}$.
   c) En déduire que $\mathscr{C}_g$ admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique que l'on déterminera.

d) Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} g(x)-x+2=0$ puis interpréter graphiquement cette limite.

Exercice 3 *(4 points)*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soient les points A, B et C définis par :

- A est de coordonnées cartésiennes $(-1, \sqrt{3})$.
- B est de coordonnées polaires $\left[2, \frac{\pi}{6}\right]$.
- $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

1) a) Déterminer les coordonnées polaires de A et les coordonnées cartésiennes de B.
   b) Construire les points A, B et C.
2) a) Justifier que : $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
   b) En déduire que le quadrilatère $OBCA$ est un carré .
3) a) Vérifier que : $\overrightarrow{OC}=(\sqrt{3}-1)\vec{u}+(\sqrt{3}+1)\vec{v}$.
   b) Montrer que le point C a pour coordonnées polaires $\left[2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{12}\right]$.
   c) En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 4 *(5 points)*

Le plan est orienté dans le sens direct .
Dans l'annexe ci-jointe :

- ABC est un triangle rectangle et isocèle en C tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- ACD est un triangle équilatéral direct .
- BCE est un triangle isocèle en B tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}}\right)\equiv-\frac{16\pi}{3}[2\pi]$.

1) $-\frac{43\pi}{3}$ est-elle une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}}\right)$? justifier la réponse.
2) Déterminer la mesure principale de : $\left(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BE}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}}\right)$.
3) Montrer que les points C, D et E sont alignés.
4) a) Construire les points F et G tels que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DG}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.
   b) Prouver que les droites (AF) et (DG) sont perpendiculaires.
5) Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et N un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ prive des points A et B.
   Montrer que : $\left(\widehat{\overrightarrow{NB},\overrightarrow{NC}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Annexe : à rendre avec la copie

Nom et Prénom : ....Classe : ....