LYCEE MONGI SLIM SFAX	PROF : Mrs ►♦♦ *CHAFIK MAALEJ* ♦♦◄ ►♦♦ *HICHEM CHAKROUN* ♦♦◄	
ANNEE SCOLAIRE ♦♦ 2022& 2023 ♦♦	♦♦ *DEVOIR DE SYNTHESE N°1* ♦♦	
CLASSE ♦♦ 4ème *MATHEMATIQUES*♦♦	♦♦ Durée 3h ♦♦	♦♦ Date 12 -12- 2022♦♦

EXERCICE N°1 (5 pts)

I)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta) : Z^2-(1+2e^{i\theta})Z+e^{i\theta}+e^{i2\theta}=0 \quad ,\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

II) Le plan complexe **P** est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathscr{R}(o,\vec{u},\vec{v})$

on considère les points M et N d'affixes respectives $Z_M=1+e^{i\theta}$, $Z_N=i+e^{i\theta}$ $,\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

1) a) Déterminer et représenter l'ensemble des points M lorsque θ varie dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

b) Montrer que le point N est l'image du point M par une translation T que l'on précisera

c) Déterminer et représenter alors l'ensembles des points N lorsque θ varie dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

2) a) Déterminer la forme exponentielle de Z_M et Z_N

b) En déduire que $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

3) On pose $d(\theta)=OM^2+ON^2$

a) Vérifier que $\det(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})=\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})+1$

b) Déduire que $d(\theta)=4+2\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})$

c) Déterminer alors la valeur maximale de $d(\theta)$

EXERCICE N°2 (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[$ par $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$ $,\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$. En déduire que pour tout réel

$x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[$ $\cos x+\sin x>0$

b) Justifier que f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[$ et que $f'(x)=\frac{1}{(\cos x+\sin x)^2}=\frac{1}{1+\sin(2x)}$

c) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera

b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et que et que $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{x^2+(x-1)^2}$

3) Soit T la tangente à $(\mathscr{C})$ au point $I(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{1}{2})$

a) Vérifier que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[$ et que $f''(x) = \dfrac{-2\cos(2x)}{(1+\sin(2x))^2}$

b) Montrer que I est un point d'inflexion de $(\mathscr{C})$

c) Montrer que pour tout $x \in \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[$,il existe $c \in \left]\dfrac{\pi}{4}, x\right[$ tel que $f(x) - f(\dfrac{\pi}{4}) = (x - \dfrac{\pi}{4})f'(c)$

d) Montrer que $(\mathscr{C})$ est au-dessus de T sur $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[$

4) Tracer alors T et $(\mathscr{C})$ dans **<u>l'annex 1</u>**

<u>EXERCICE N°3</u> (5 pts)

A) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = n\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} U_n$

2) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

B) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

1) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots\dots\dots + x^n$

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots\dots\dots\dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

3) Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}$

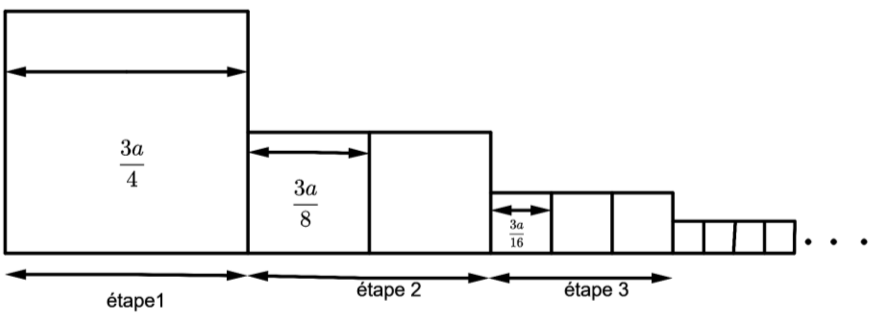
a) Exprimer (S_n) en fonction de n

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{16}{9}$

4) On effectue la construction d'une série des carrés de la manière suivante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

à chaque étape n on construit n carrés identiques de côté égale à la moitié du côté d'un carré de l'étape $n-1$



On désigne par $\mathcal{A}_k$ la somme des aires des carrés obtenue à la k$^{\text{ème}}$ étape

a) Calculer $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$ en fonction de a

b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k = a^2$

EXERCICE N°4 (5 pts)

Dans la figure ci-dessous dans **l'annexe 2** on donne

ABC un triangle équilatéral direct de centre O. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$ et D le symétrique de B par rapport à la droite (AC).On note Δ la médiatrice du segment $[CD]$

On se propose de déterminer l'ensemble Γ des isométries qui envoi A sur B et B sur C.

1) a) Caractériser $S_{(IC)} o S_{\Delta}$ et $S_{\Delta} o S_{(AJ)}$

b) Caractériser alors $t_{\overrightarrow{AB}} o R_{(A, \frac{2\pi}{3})}$

Soit f un élément de Γ et $\mathbb{E}$ l'ensemble des points invariants par f

2) Montrer que f ne peut être ni une symétrie orthogonale ni une translation

3) Montrer que si $\mathbb{E} \neq \emptyset$ alors f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle

4) on suppose que $\mathbb{E} = \emptyset$

a) Justifier que f est une symétrie glissante

b) Soit $g = t_{\overrightarrow{BA}} o f$ Déterminer $g(A) et\ g(B)$

c) Montrer que g est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe

5) Conclure que $\Gamma = \left\{ R_{(O, \frac{2\pi}{3})}, t_{\overrightarrow{AB}} o S_{(AC)} \right\}$

6) Soit M un point du plan. On désigne par $M' = R_{(O, \frac{2\pi}{3})}(M)$ et $M" = t_{\overrightarrow{AB}} o S_{(AC)}(M)$

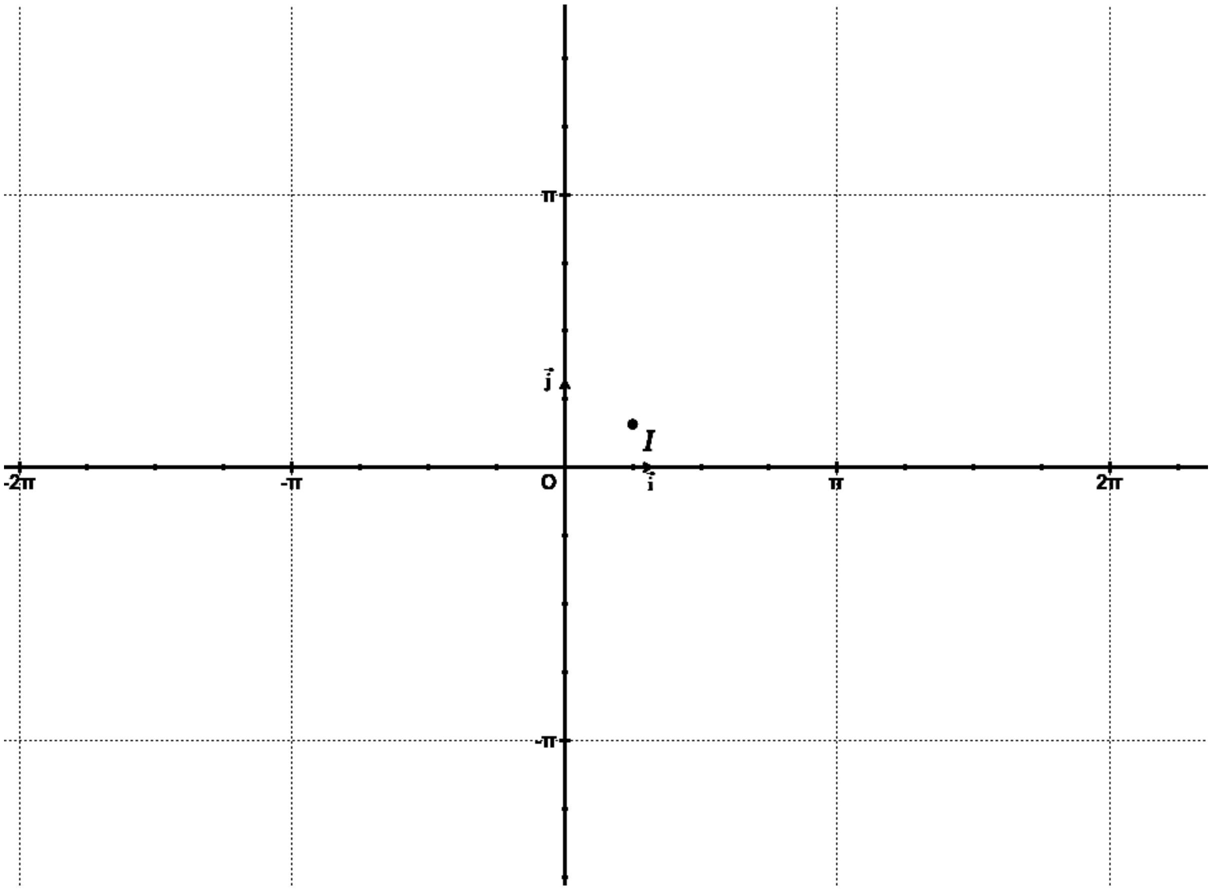
a) Caractériser $t_{\overrightarrow{AB}} o S_{(AC)} o R_{(O, \frac{-2\pi}{3})}$

b) Montrer que $JM' = JM"$

Feuille rendre avec la copie

Nom et Prénom classe ....

ANNEXE 1



ANNEXE 2