Exercice 1 (5 points)

Dans la figure (1) de la page annexe, on a tracé, dans un plan muni repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
Les droites d'équations $x = 2$, $y = -1$ et $y = x - 1$ sont des asymptotes à $\mathscr{C}_f$.

1. Par lecture graphique :
   - a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   - b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x + 1$.
2.
   - a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = -1$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.
   - b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.
   - c) Déterminer $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{f(x)}$.
3. Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$ et on désigne par (C_g) sa courbe représentative .
   - a) Déterminer l'ensemble de définition de g.
   - b) Déterminer $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.
   - c) Montrer que g est prolongeable par continuité en 2.

Exercice 2 (6 points)

I. Soit la fonction g définie sur $[0,+\infty[\setminus\{2\}$ par $g(x) = \dfrac{x-2}{x-\sqrt{x+2}}$.

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 2 et déterminer son prolongement G.
2. Montrer que G est continue sur $[0,+\infty[$.
3.
   - a) Montrer que l'équation : $G(x) = x$ admet dans $]1,2[$ au moins une solution α.
   - b) Montrer que $\sqrt{\alpha+2} = \alpha - 1 + \dfrac{2}{\alpha}$.

II. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2-4x+3} - 2x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = G(x) & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ f(x) = \dfrac{3x^2-8x+4}{x^2-x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Etudier la continuité de f en 1.
2. Montrer que f est continue en 2.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
4.
   - a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   - b) Montrer que la droite $\Delta : y = -3x + 2$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

Exercice 3 (4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans figure (2) de la page annexe , ABC est un triangle isocèle de sommet principal A tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$, $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et $\mathscr{C}'$ le cercle de centre A et passant par B .

Soit E un point de l'arc $\overset{\frown}{CA}$ de $\mathscr{C}$ privé de A et C . La droite (CE) recoupe $\mathscr{C}'$ en D et la droite (BD) recoupe $\mathscr{C}$ en F .

1. Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$.
2. Soit Γ l'ensemble des points M du plan tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}}\right) \equiv -\frac{3\pi}{8}[2\pi]$.
   - a) Vérifier que $B \in \Gamma$.
   - b) Déterminer l'ensemble Γ.
3.
   - a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DE}}\right) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$.
   - b) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED}}\right) \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.
   - c) En déduire que le triangle BED est isocèle.
4. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}}\right)[2\pi]$.

Exercice 4 (5 points)

1.
   - a) Montrer que $3\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.
   - b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ l'équation : $3\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$.
2. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{3\cos x - \sqrt{3}\sin x}$.
   - a) Déterminer l'ensemble $D = \left\{x \in [0, 2\pi] \text{ tel que } f(x) \text{ existe}\right\}$.
   - b) Montrer que pour tout $x \in D$, $f(x) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.
3.
   - a) Résoudre dans $[0, 2\pi]$, l'équation : $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
   - b) Résoudre dans $[0, 2\pi]$, l'inéquation : $f(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

On donne : $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$.

❄ Page Annexe ❄