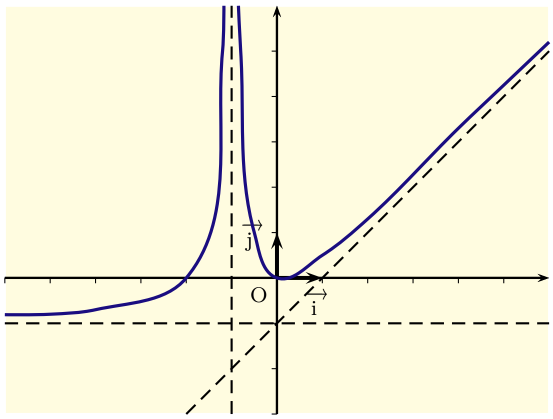
LYCEE SECONDAIRE EL ALIA A.S : 2022-2023 Prof LAHBIB GHALEB	DEVOIR DE SYNTHESE N°1	
	Epreuve : **MATHMATIQUES**	Classe : **3 Maths**
	Durée : 2 h	13-12-2023

❧ ❧ ❧ ❧ ❧ ❧ ❧

Le sujet comporte 2 pages numérotées 1/2 et 2/2

Exercice 1 .... (5 points)

On a représenté dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et les droites $\Delta_1 : x = -1$, $\Delta_2 : y = -1$ et $\Delta_3 : y = x - 1$ des asymptotes à $\mathcal{C}_f$.



1) **a/** Par lecture graphique déterminer :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$.

b/ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{f(x)+1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x^2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

2) On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

On désigne par $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un intervalle $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a/ Déterminer l'ensemble de définition de g.

b/ Montrer que g est prolongeable par continuité en -1.

c/ Montrer que $\mathcal{C}_g$ admet trois asymptotes que l'on précisera.

Exercice 2 .... (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+1} - x - 1 & \text{Si} x < -1 \\ f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x} & \text{Si } x \in [-1, 1]\setminus\{0\} \\ f(x) = \dfrac{|x^2 - 2x| - x}{1-x} & \text{Si} x > 1 \end{cases}$

1) **a/** Etudier la continuité de la fonction f en 1 et en (-1).

b/ Montrer que pour tout réel $x \in [-1, 1]\setminus\{0\}$, on a : $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}} - \dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}$.

c/ En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 .

2) **a/** Calculer la limite de la fonction f en $(-\infty)$.

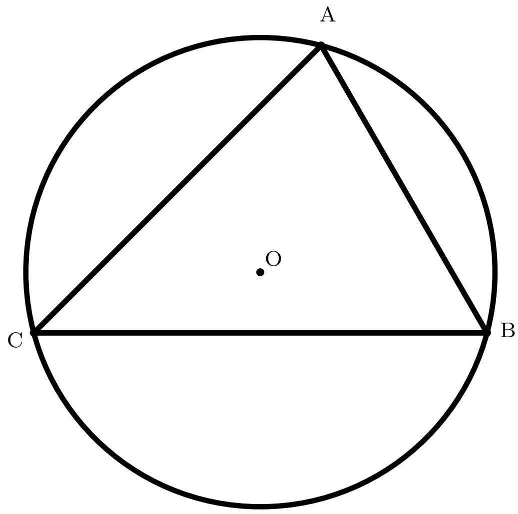
b/ Montrer que pour tout réel $x < -1$, on a : $\dfrac{1}{f(x)+1} = f(x) + 2x + 1$

c/ En déduire que la courbe (C) de la fonction f admet au voisinage de $(-\infty)$ une asymptote oblique D dont on précisera une équation cartésienne.

3) **a/** Calculer la limite de la fonction f en $(+\infty)$.

b/ Montrer que la droite $D' : y = -x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $(+\infty)$.

Exercice 3 .... (5 points)



Le plan est orienté dans le sens direct.
Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O tel que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ et } \left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{7\pi}{4}[2\pi]$$

1) Déterminer la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$.

2) Montrer que $(OA) \perp (OB)$.

3) Soit $A' = S_{(BC)}(A)$. La droite (BA') recoupe $\mathcal{C}$ en D.

a/ Déterminer la mesure principale de $\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}\right)$

b/ Montrer que le triangle ACD est équilatéral direct

4) La droite (OA) recoupe $\mathcal{C}$ en E. Montrer que les points C, E et A' sont alignés.

5) Soit $\Gamma = \left\{M \in P \text{ tel que } \left(\widehat{\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MO}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]\right\}$.

a/ Vérifier que $C \in \Gamma$

b/ Déterminer alors l'ensemble Γ

Exercice 4 .... (5 points)

Pour tout réel x, on pose : $f(x) = 1 + \cos(2x) - \sin(2x)$.

1) **a/** Montrer que pour tout réel $x, f(x) = (2\cos x)(\cos x - \sin x)$.

b/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $f(x) = 0$.

2) On pose : $g(x) = \dfrac{2\cos(2x)}{1 + \cos(2x) - \sin(2x)}$.

a/ Déterminer l'ensemble D des réels x de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ pour lesquels g(x) existe.

b/ Montrer que pour tout réel x de $D, g(x) = 1 + \tan x$

c/ Montrer alors que $\tan \dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi[$ l'équation : $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\cos x - \sin x = \sqrt{2} - 1$.

On donne : $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$; $1 + \cos(2a) = 2\cos^2 a$; $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$ et

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$