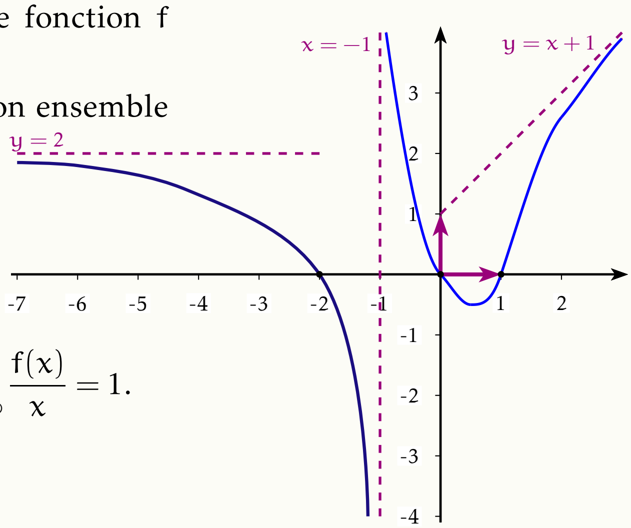
Exercice 1

Dans la figure ci-dessous, on a tracé, dans un plan muni repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ainsi que ses asymptotes.



1. a. Déterminer les limites de f au bornes de son ensemble de définition.

   b. Dresser le tableau de variation de f.

2. Déterminer $f\left(]-\infty,-1[\right)$ et $f\left([1,+\infty[\right)$.

3. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x-1$.

   b. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=1$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=1$.

   c. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x+2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x+2}$.

   d. Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{f(x)}$.

4. Soit la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{1}{\left(f(x)\right)^2}$ et on désigne par (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

   a. Déterminer l'ensemble de définition de g.

   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to-2} g(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

   c. Montrer que g est prolongeable par continuité en -1.

Exercice 2

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{(x-5)|5-x|+3}{4-x} & \text{si } x>4 \\ f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } 1<x\leqslant 4 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}+1}{3-x} & \text{si } x\leqslant 1 \end{cases}$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. a. Montrer que f est continue en 1.

   b. Calculer $\lim\limits_{x\to4^+} g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

   b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

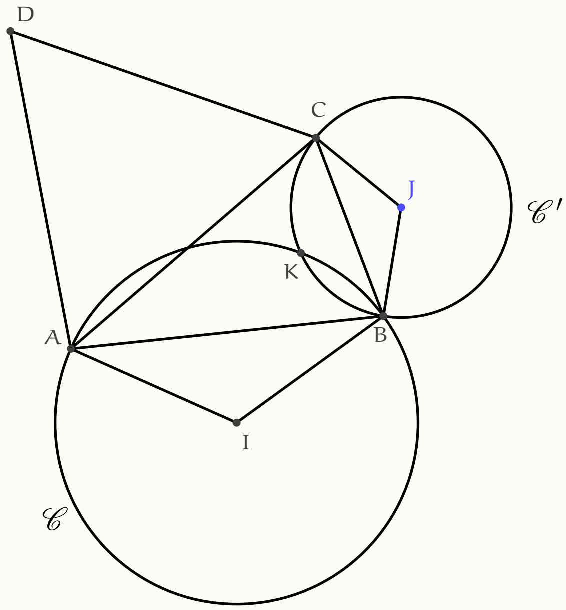
   c. Montrer que $\Delta : y=6-x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}$.

Exercice 3

Le plan est orienté dans le sens direct.
Dans la figure ci-dessous :

- $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de centre respectifs I et J et se coupent en B et K.
- ACD est un triangle équilatéral direct.
- $\left(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{JC},\overrightarrow{JB}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.



1. Soit Γ_1 l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi].$$
   a. Vérifier que $D \in \Gamma_1$.
   b. Déterminer alors Γ_1.
2. Soit Γ_2 l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi].$$
Montrer que Γ_2 est l'arc orienté $\overset{\frown}{AC}$ privé de A et C du cercle circonscrit au triangle ACD.
3. a. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.
   b. Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KC}\right)$.
   c. En déduire que $K \in \Gamma_2$.
4. a. Montrer que les points B , K et D sont alignés.
   b. En déduire que les droites (IJ) et (BD) sont perpendiculaires.

Exercice 4

1. Soit $f(x) = 2\sqrt{3}\cos^2 x + \sin(2x)$.
   a. Montrer que $f(x) = 4\cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0,\pi]$ les équations : $\cos(x) = 0$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.
   c. Résoudre dans $[0,\pi]$ l'inéquation : $f(x) \leqslant 0$.
2. Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{2\sqrt{3}\cos^2 x + \sin(2x)}$.
   a. Déterminer l'ensemble $D = \left\{x \in [0,\pi] \text{ tel que } g(x) \text{ existe}\right\}$.
   b. Montrer que pour tout $x \in D$, $g(x) = \dfrac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{2\cos x}$.
   c. Calculer $g\left(\frac{\pi}{12}\right)$. En déduire que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.
   d. Résoudre dans $[0,\pi]$, l'équation $\left(2 - \sqrt{3}\right)\cos x + \sin x = 0$