Lycée Said Boubaker Moknine Devoir de synthèse n°1 Prof : Naija Yosra	Niveau : 3ème année Maths Epreuve : Mathématiques Durée : 2h / date: 13/12/2023

Exercice 1 :(6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-2} & si\ x \geq 0\ et\ x \neq 2 \\ \sqrt{x^2 - x} + 2x & si\ x < 0 \end{cases}$

On désigne par(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) a) Vérifier que pour tout x de $[0, +\infty[\setminus \{2\}$, $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-2}$.

b) En déduire que (C_f) admet une asymptote oblique Δ que l'on déterminera.

c) Déterminer une asymptote verticale à (C_f) en justifiant votre réponse.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = \frac{1}{2}$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3) a) Montrer que (C_f) admet au point O une demi-tangente horizontale à droite.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

4) Déterminer le domaine de dérivabilité de f. (Justifier votre réponse).

5) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x < 0$

b) Soit T la droite d'équation $y = \left(2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)x + \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Montrer que la droite T est tangente à (C_f) au point d'abscisse -1.

6) Soit g la restriction de f à $]0, +\infty[\setminus \{2\}$ et (C_g) sa courbe dans le repère$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[\setminus \{2\}$, $g'(x) = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

c) Montrer que (C_g) admet deux tangentes perpendiculaires à la droite D dont une équation cartésienne est : $x - 3y + 1 = 0$.

Exercice 2 :(5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On donne en annexe le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon $\sqrt{6}$ et le point B de $(\mathcal{C})$ tel que et $x_B = \sqrt{3}\ et\ y_B < 0$.

Soit C le point de coordonnées polaires $(\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4})$.

1) a) Calculer les coordonnées polaires de B puis déterminer l'ordonnée de B.

b) Calculer les coordonnées cartésiennes de C puis placer le point C.(En annexe).

2) Soit A le point de coordonnées cartésiennes $(-1 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$.

a) Montrer que $OBAC$ est un rectangle et construire le point A. (En annexe).

b) Calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ et dét $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

c) En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

d) Montrer que les coordonnées polaires de A sont $(2\sqrt{2}, \frac{-5\pi}{12})$ et en déduire que $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

3) a) Représenter en annexe l'ensemble des points M du plan de coordonnées polaires $(1, \theta)$ tels que : $0 \leq \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\cos\theta \leq 1$

b) Déterminer les réels θ de $[0, 2\pi[$ tels que $0 \leq \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\cos\theta \leq 1$.

Exercice 3 :(4 points)

Soit pour tout réel x ,$A(x) = 1 + \cos(2x) - \sin(2x)$

1) Calculer $A(\frac{\pi}{8})$.

2) a) Montrer que $cos\ x - \sin x = -\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$

b) Déterminer et représenter l'ensemble des solutions dans $]-\pi, \pi]$ de l'inéquation $cosx \leq \sin x$

c) Montrer que pour tout réel x,on a :$A(x) = -2\sqrt{2}\cos x\ \sin(x - \frac{\pi}{4})$.

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x) = 0$.

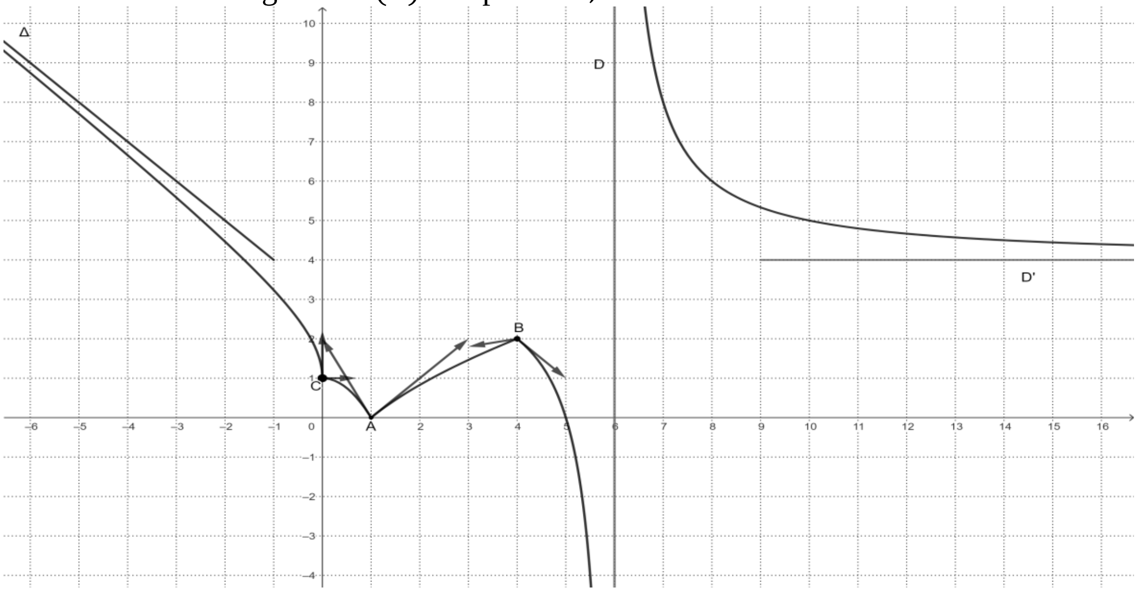
3) On pose $B(x)$= $\frac{2\cos(2x)}{A(x)}$ pour tout réel x tel que $A(x) \neq 0$

a) Montrer que $B(x)$=1+tan x

b) En déduire la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{8}$ puis celle de $\tan\frac{7\pi}{8}$

Exercice 4 : 5 points

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$.La courbe (C) donnée ci-dessous est celle d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{6\}$.On admet que les droites $\Delta = y=-x+3$, $D: x=6$ et $D': y=4$ sont asymptotes à (C). On donne aussi les demies tangentes à (C) aux points A, B et C.



1) Compléter : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)+x+3}=$……… $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)-4}=$………. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{4-f(x)}=$…….
$\lim\limits_{x\to4}\frac{1}{f(x)-2}=$………. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-1}{x}=$ ……… $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1-f(x)}{x}=$ ………. $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}=$ ………
2) Préciser sur les intervalles sur lesquels f est dérivable .
………………………………………………………………………………………….
3) Déterminer une équation de la demi-tangente à (C) à gauche au point A.
………………………………………………………………………………………..
4) La tangente (T) à (C) au point d'abscisse 8 est parallèle à la droite d'équation $y=-x$.
   a) Tracer T (Dans le même repère)
   b) Déterminer une approximation affine de $f(7.9)$
………………………………………………………………………………………
5) Soit g la restriction de f à $]6,+\infty[$ et h fonction définie sur $]6,+\infty[$ par $h(x)=g(x)-x$.
   a) En s'aidant du graphique ,montrer que h est strictement décroissante sur $]6,+\infty[$.
   ……………………………………………………………………………..
   ………………………………………………………………………………
   b) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet dans $]7,8[$ une unique solution α.
……………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
   c) On admet que $g(x)=\frac{4x-20}{x-6}$
      i) Montrer que pour tout $x\in]6,+\infty[$,$g'(x)=\frac{-4}{(x-6)^2}$
……………………………………………………………………………………………………
      ii) Montrer que $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{g(x)-\alpha}{x-\alpha}=\frac{-4\alpha^2}{(4\alpha-20)^2}$
………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom ………………………………………………………………………..

Annexe exercice 2