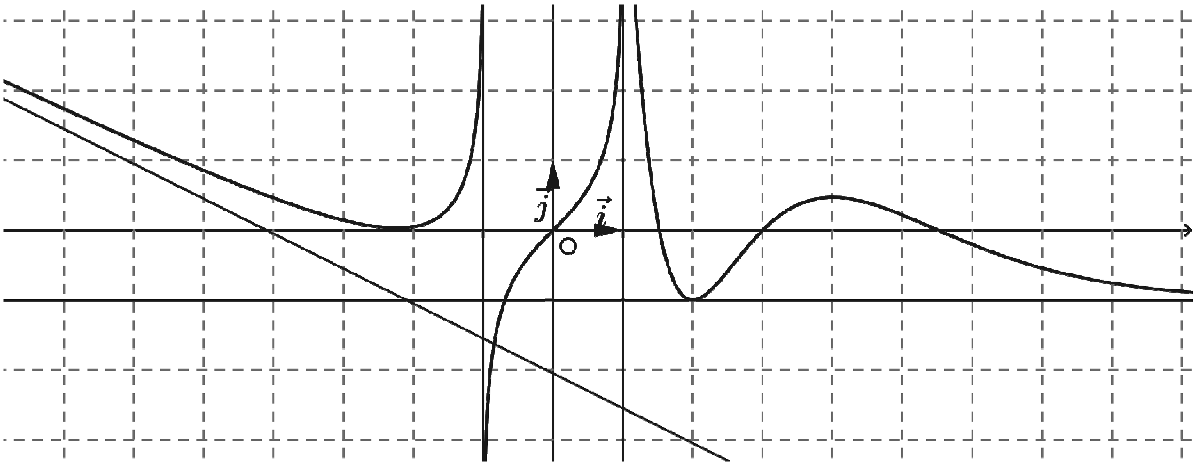
Lycée Pilote 15 octobre 1963 - Bizerte	Classes : $3^{ème}$ $Maths_{1+2}$		
Profs: Mme Galaï & Mme Bayoudh	Décembre 2013	Durée :2 heures	
Devoir de synthèse n °1 en mathématiques	Nom et prénom :		

NB : *La rédaction et le soin de la copie seront pris en compte ainsi que toute tentative de recherche même non aboutie. Merci. . .*

Exercice 1 : (4,5 points)

On a tracé dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe Cf représentative d'une fonction f.



1) a/ Déterminer le domaine de définition de f.

b/ Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x^2+1}{f(x)+1}$

c/ Déterminer les réels a et b tels que $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - ax - b] = 0$

d/ Déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2-x+3}}$

2) Soit g la fonction définie sur $]-\infty,-1[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)+\sqrt{f(x)}} - \sqrt{f(x)}$

a/ Montrer que pour tout $x \in]-\infty,-1[$ $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{f(x)}}}+1}$

b/ Déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

Exercice 2 : (6 points)

Soit m un paramètre réel et soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-|x|}{x^2+x-2} & si\ x < 1 \\ \frac{\sqrt{3x-2}-2}{3x-6} & si\ 1 \le x < 2 \\ \sqrt{x^2-2x} + mx & si\ x \ge 2 \end{cases}$

On désigne par **C** sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

2) a/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$.

b/Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) a/Montrer que f est continue en 1

b/ Déterminer m pour que f soit continue en 2

4) a/ Pour $m = \frac{1}{8}$, montrer que la droite $\Delta: y = \frac{9}{8}x - 1$ est une asymptote oblique à **C** au voisinage de $(+\infty)$

b/ Pour $m = -1$, montrer que **C** admet une asymptote horizontale au voisinage de $(+\infty)$.

Exercice 3 : (5 points)

Soit $u(x) = \sqrt{3} - \sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x)$ et $v(x) = \sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x)$

1) a/ Déterminer les réels $r > 0$ et φ tels que $v(x) = r\cos(2x - \varphi)$

   b/ Montrer que pour tout réel x , $u(x) = 4\sin x.\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

2) On pose $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

   a/ Déterminer D_g le domaine de définition de g

   b/ Montrer que pour tout $x \in D_g$, $g(x) = \frac{\sin x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$

   c/ Calculer $g(\frac{5\pi}{12})$. En déduire la valeur exacte de $\tan(\frac{5\pi}{12})$.

3) Résoudre dans IR l'équation $g(x) = 1$

   Question bonus : Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $g(x) > 0$.

Exercice 4: (4,5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct .

Dans la figure ci-dessous ABC est un triangle isocèle de sommet principal A tel que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit.

1) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2) Soit M un point de l'arc orienté BC , distinct de B et C.

   Soient I , H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB) , (BC) et (AC).

   a/ Montrer que les points H , K , C et M appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}'$ que l'on précisera.

   b/ Montrer que $(\overrightarrow{KH}, \overrightarrow{KM}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})[2\pi]$

   c/ Montrer que $(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KI}) \equiv (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})[2\pi]$. En déduire que **les points I , H et K sont alignés**.

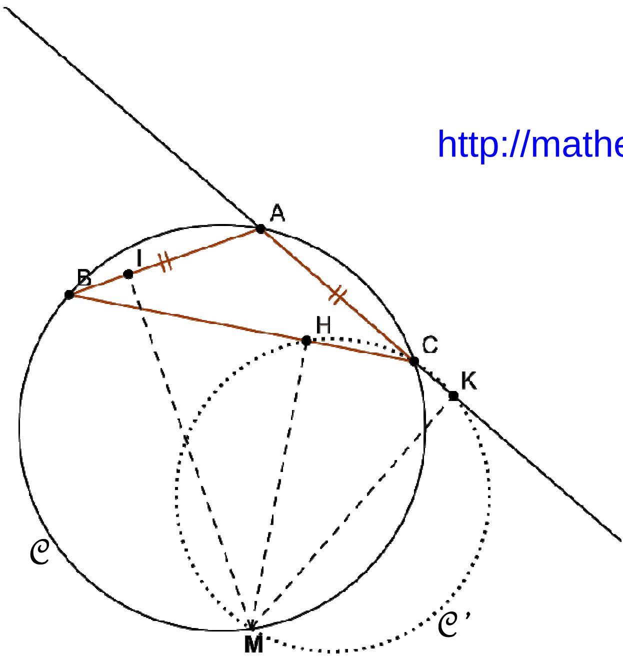
3) Soit $\mathcal{E} = \left\{M \in P \,/\, (\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$

   Soit D le symétrique de C par rapport à A .

   a/ Montrer que D appartient à $\mathcal{E}$.

   b/ Déterminer et construire alors l'ensemble $\mathcal{E}$.

   c/ Montrer que le point M' symétrique de M par rapport à (BC) appartient à $\mathcal{E}$.



Bon travail et bonne chance