

EXERCICE 1 : (4 points)

- 1) On considère a, b, x et y des réels strictement positifs.

Montrer que si $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ alors $\frac{y^2}{y^2+x^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2} = 1$.

- 2) Soit α un angle aigu non nul .

Montrer que $\frac{1}{1+\cos(\alpha)} + \frac{1}{1-\cos(\alpha)} = \frac{2}{\sin^2(\alpha)}$

- 3) Montrer que pour tout réels a et b on a : $(a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha))^2 \leq a^2 + b^2$

- 4) On considère trois réels a, b et c vérifiant : $a + b + c = 0$.

Montrer que $2a^3 + 2b^3 + 2c^3 = 6abc$.

EXERCICE 2 : (5 points)

On considère l'expression $A = (x^2 - 1)^3$ où x désigne un nombre réel .

- 1) Calculer la valeur exacte de A pour $x = 1 + \sqrt{2}$.

- 2) A l'aide de la calculatrice donner l'arrondi au centième de A pour $x = 0.0035$.

- 3) a) Développer l'expression A .

b) En déduire que pour tout réel x , $x^6 - 1 = (x-1)(x+1)[(x^2-1)^2 + 3x^2]$.

- 4) a) Montrer que pour tout réel x , on a $(x^2 - 1)^2 + 3x^2 > 0$.

b) Ecrire l'ensemble $J = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^6 \geq 1\}$ sous forme d'une réunion d'intervalles.

EXERCICE 3 : (4 points)

Soient x et y deux nombres réels positifs tels que : $-\frac{x}{2} - 1 \leq x - 2 \leq -\frac{x}{2} + 1$ et $1 \leq (2y - 1)^2 - 3 \leq 6$

- 1) Montrer que $\frac{2}{3} \leq x \leq 2$ et $\frac{3}{2} \leq y \leq 2$

- 2) Encadrer alors $A = \frac{-2\sqrt{xy} + 5}{x^2 - y + 2}$.

EXERCICE 4 : (7 points)

Dans la figure ci-dessous , on a tracé un triangle ABC isocèle en A tel que $\widehat{BAC} = 36^\circ$ et $BC = 4$
La bissectrice de $\widehat{ABC}$ coupe le segment [AC] en D.

- 1) a) Montrer que le triangle ABD est isocèle.

b) Montrer que $AD = 4$.

- 2) Soit I le milieu de [AB]. Montrer que $AB = 8 \cos(36^\circ)$.

- 3) Le cercle de diamètre [BD] recoupe (AC) en K.

a) Montrer que K est le milieu de [DC]

b) Montrer que $CD = 8 \cos(72^\circ)$.

c) En déduire que : $\cos(36^\circ) - \cos(72^\circ) = \frac{1}{2}$

- 4) Soit J le milieu de [BC]. Montrer que $\cos(36^\circ) \cos(72^\circ) = \frac{1}{4}$.

- 5) a) Vérifier que $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$.

b) Calculer $\cos(36^\circ) + \cos(72^\circ)$.

c) Montrer alors que : $\cos(36^\circ) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

