Lycée : Mohamed Ali -Sfax Profs : Fourati Ali Derbel Louati Nada	**Devoir de synthèse N°3** Épreuve: Mathématiques	Date : 28/05/2024 Durée : 2 h Classe: 2ème Sc 5 + 6

Exercice 1 :(7pts)

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{x+3}{x+1}$

1°/ a- Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

b- Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de la fonction f.

c-Tracer $(\mathscr{C}_f)$; dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

d- Dresser à partir du graphique le tableau de signe de $f(x)$

2°/ Soit la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{x+3}$

a- Déterminer D_g l'ensemble de définition de g.

b- Résoudre ,par calcul, dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=g(x)$.

3°/ a-Tracer, dans le même repère, la courbe$(\mathscr{C}_g)$ de la fonction g.

b- Résoudre ,graphiquement, dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{(x+3)\sqrt{x+3}}{x+1}\leq 0$.

4°/ Soit la fonction h définie par $h(x)=\frac{3-|x|}{1-|x|}$

a- Montrer que la fonction h est paire.

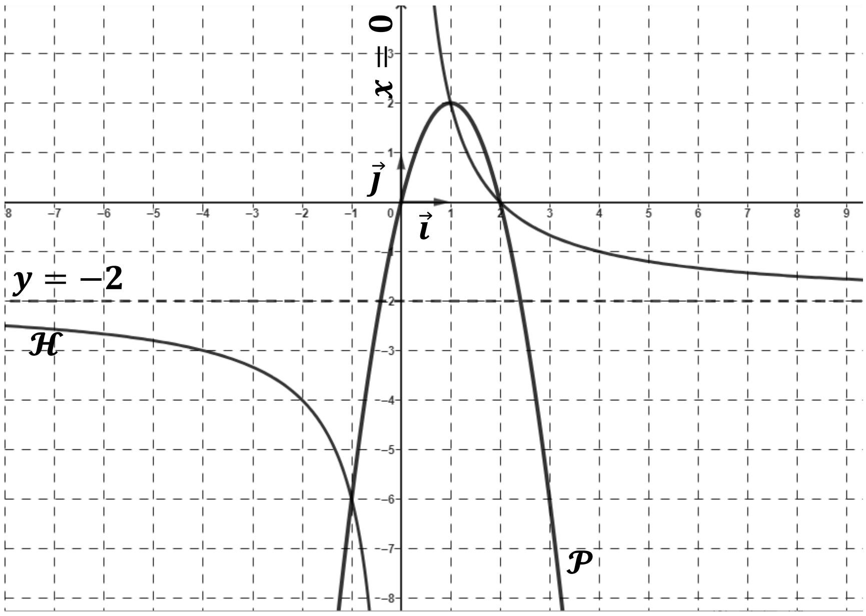
b- Vérifier que si $x\in\,]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;0]$; on a $h(x)=f(x)$.

c- Tracer $(\mathscr{C}_h)$ à partir la courbe $(\mathscr{C}_f)$

d- Déterminer, graphiquement, l'ensemble des réel m tel que l'équation $h(x)=m$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions distincts

Exercice 2 :(3pts)

Dans la figure ci-contre ,on a représenté la parabole $\mathcal{P}$ d'une fonction f et l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'une fonction g d'asymptotes les droites d'équations $x=0$ et $y=-2$



1°/Justifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2+4x$

2°/g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

a- Justifier que $\frac{a}{c}=-2$ et $d=0$

b- Justifier que $g(2)=0$

c- En déduire que $g(x)=\frac{-2x+4}{x}$

3°/Résoudre graphiquement, dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(-2x+4)\left(x-\frac{1}{x}\right)\leq 0$.

Exercice 3 :(5pts)

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, on donne les deux points $A(1;3)$ et $B(4;2)$.

1°/ a- Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ la perpendiculaire à (AB) passant par B.

b- Vérifier que les droites Δ et (OA) sont parallèles .

2°/ Soit l'ensemble $\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$.

a- Vérifier que $O \in \mathscr{C}$ et $B \in \mathscr{C}$

b- Montrer que $\mathscr{C}$ est le cercle de centre A et de rayon R que l'on déterminera.

c- En déduire que la droite Δ est tangente à $\mathscr{C}$ en B.

3°/ **On donne dans la suite $\Delta: 3x - y - 10 = 0$**

Soit le point $I(-4;3)$ et le cercle $\mathscr{C}'$ de centre I et de rayon $R' = 5$

a- Calculer la distance du point I à la droite Δ .

b- En déduire que $\mathscr{C}' \cap \Delta = \emptyset$

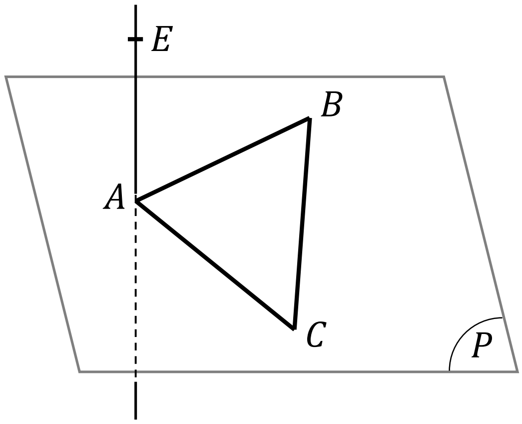
4°/a- Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}'$

b- Vérifier que l'origine $O \in \mathscr{C}'$

c- Calculer les coordonnées des points d'intersections des deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Exercice 4 :(5pts)

Soit ABC un triangle équilatéral de l'espace situé dans un plan P et on donne le point E tel que $(AE) \perp P$.



1°/ a-Montrer que le triangle ABE est rectangle en A

b- Montrer que les deux plans P et (ABE) sont perpendiculaires

2°/ Soit I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[EB]$ et la droite Δ parallèle à (CI) passant par J.

a- Montrer que $(CI) \perp (ABE)$.

b- En déduire que Δ est l'axe du cercle circonscrit au triangle ABE.

3°/a- Montrer que (IJC) est plan médiateur de $[AB]$

b- En déduire que $(IJC) \perp (ABC)$.

c- Justifier que $(IJC) \cap (ABE) = (IJ)$.

d- En déduire que $(IJ) \perp P$.

4°/On considère un point S de l'espace vérifiant $SA = SB = SC$ et G le centre de gravité du triangle ABC .

a- Montrer que la droite (SG) est l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC.

b- En déduire que les droite (SG); (IJ) et (AE) sont parallèles.

5°/On pose $AB = a$ et $AE = 2a$ tel que a un réel strictement positif.

Exprimer la distance JC en fonction de a.