Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte, indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie

1) L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $A(1,2,0)$, $B(-1,1,1)$ et $I(1,0,1)$

Si h est une homothétie de centre I et de rapport 2 alors l'image de la droite (AB) est une droite de vecteur directeur

a) $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

b) $\vec{u}=-4\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$

c) $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$

2) L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(1,0,0)$, $B(0,0,1)$ et $C(1,-1,1)$. La distance du point C à la droite (AB) est égale à :

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

3) $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$ est égale à :

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $-\dfrac{1}{2}$ c) 2

4) Le chiffre des unités de 743^{2012} est :

a) 3 b) 1 c) 5

Exercice 2 (4 points)

Un nourrisson est pesé quotidiennement durant le premier mois de sa naissance. Dans le tableau ci-dessous, la variable X désigne le nombre de jours après la naissance du nourrisson, et la variable Y son poids en kilogrammes

X(en jours)	4	6	9	14	17	19	22
Y(en kg)	3,6	3,75	3,80	3,90	4	4,25	4,50

1) a) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage des points associé à la série (X , Y)

b) Un ajustement affine de cette série est-il justifié ?

2) a) Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart type σ_X de la variable X

b) Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart type σ_Y de la variable Y

3) a) calculer la covariance du couple (X , Y)

b) Interpréter le résultat trouvé

4) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X et l'équation de la droite de régression de X en Y. (Les coefficients sont donnés à 0,01 prés)

5) a) Quelle pourrait être une estimation du poids du nourrisson après 30 jours de sa naissance ?

b) Quel pourrait être l'age du nourrisson sachant que son poids est 3,85 kg ?

Exercice 3 (5 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et tel que $\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Soit $I = S_{(AB)}$ et $J = B * C$. On pose h : l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{1}{2}$ et R : la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$

1) Soit : $f = h \circ R$. Montrer que f est une similitude directe dont-on précisera le rapport et l'angle.
2) a) Montrer que R(A)=C. Déterminer f(A) et f(C) et montrer que f(I) O
   b) Déterminer $f\big((AI)\big)$
3) On pose $\varphi = f \circ S_{(CO)}$
   a) Montrer que φ est une similitude indirecte dont-on précisera le rapport.
   b) Déterminer $\varphi(I)$, $\varphi(C)$ et $\varphi(B)$
   c) On note Ω le centre de φ. Montrer que $\overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega J}$. Construire Ω
   d) Montrer que l'axe Δ de φ est la perpendiculaire à (BC) en Ω

Exercice 4 (5 points)

On considère la suite (I_n) définie sur IN^* par : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\, dx$

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $I_n \geq 0$
   b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante
   c) En déduire qu'elle est convergente
2) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a : $2I_n + nI_{n-1} = e^2$. Calculer I_1 et I_2
3) Montrer à l'aide de ce qui précède que : pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a : $\dfrac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+2}$
4) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$
5) Soit f la fonction définie sur $[1\ ,\ e]$ par $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Calculer le volume (en u.v) du solide de révolution engendré par la rotation de C_f autour de l'axe $(0, \vec{i}\ )$

Exercice 5 (4 points)

1) On considère l'équation (1) d'inconnue (n , m) élément de Z^2 : $11n - 24m = 1$
   a) Justifier que cette équation admet au moins une solution.
   b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1) .En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1)
2) Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
3) (n , m) étant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1).
   a) Montrer que : $\left(10^{11n} - 1\right) - 10\left(10^{24m} - 1\right) = 9$
   b) Montrer pour tout réel x non nul et tout entier naturel k on a : $x^k - 1 = (x-1)\left(x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots\ldots\ldots + 1\right)$
   c) Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$.

En déduire que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9

4) Déterminer des questions précédentes le P.G.C.D de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$