Lycée 07 Nov. 1987 Métlaoui *** Prof : YAKOUBI Date : 02/03/2010	DEVOIR DE SYNTHESE N°2 MATHEMATIQUES DUREE 4H CLASSE $4^{ème}$ MATHS

Q.C.M : (3points)

Pour chacune des questions, une ou plusieurs réponses sont exactes.

1) On considère un triangle ABC et on note :

   S_A ; la similitude indirecte de centre A qui transforme B en C.

   S_B ; la similitude indirecte de centre B qui transforme C en A.

   S_C ; la similitude indirecte de centre C qui transforme A en B.

   a) $S_A o S_B$ est une similitude indirecte.

   b) $S_C o S_B o S_A$ fixe le point B.

   c) $S_B o S_A o S_C$ est un antidéplacement.

2) Soit (P) la parabole d'équation $y^2 = -2x + 1$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ alors:

   a) Son sommet est $S\left(\frac{1}{2},0\right)$.

   b) Son axe est l'axe des abscisses.

   c) Son foyer est $F\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

   d) Sa directrice est la droite (D): x = 1.

3) On considère le système (S) : $\begin{cases} x+y=56 \\ x\wedge y=8 \end{cases}$ où $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$.

   a) Le couple (72,–16) est solution de (S).

   b) Il n'existe aucun couple d'entiers naturels solutions de (S).

   c) (S) admet une infinité de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice n°1 : (5points)

On considère la fonction f définie sur IR_+ par: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{xLnx}{x-1} & ; \quad x\neq 0 \text{ et } x\neq 1 \\ f(0)=0 & ; \quad f(1)=1 \end{cases}$

On désigne par ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Montrer que f est continue sur IR_+.
   b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
2) Soit $x\in IR_+^*\setminus\{1\}$ et φ la fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par:

$$\varphi(t)=\frac{xLnx-x+1}{(x-1)^2}(t-1)^2-tLnt-1+t.$$

   a) Calculer φ(x) et φ(1).
      Montrer qu'il existe un réel c compris entre 1 et x tel que φ'(c)=0.
   b) En déduire que f est dérivable en 1 et que $f'(1)=\dfrac{1}{2}$.
   c) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 1.
3) a) Soit la fonction g définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $g(x) = 1 - x^2 + 2xLnx$.
      Dresser le tableau de variation de g' puis celui de g et en déduire le signe de g(x) sur $\left]0,+\infty\right[$.
   b) Etudier alors la position de la courbe ($\mathscr{C}$) par rapport à la tangente (T).
4) Dresser le tableau de variation de f et tracer ($\mathscr{C}$).

Exercice n°2: (4 points)

Soit F la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x)=\displaystyle\int_0^{\sqrt{\sin x}}\frac{t}{\sqrt{1-t^4}}dt$.

1) a) Montrer que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a: $\dfrac{\sin x}{2}\leq F(x)\leq\dfrac{1}{2}\tan x$
   b) En déduire que F est dérivable à droite en 0.
2) a) Montrer que F est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer F'(x).
   b) En déduire que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a : $F(x)=\dfrac{x}{2}$.
   c) Trouver alors l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe de la fonction : $t\mapsto\dfrac{t}{\sqrt{1-t^4}}$ et les droites d'équations x = 0 ; $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et y = 0.
3) Soit $\lambda\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right[$. On pose : $I(\lambda)=\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{\sin\lambda}}\frac{\sqrt{1-t^4}}{t^3}\,dt$.
   a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(\lambda)$
   b) Déterminer $\displaystyle\lim_{\lambda\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}I(\lambda)$.

<u>Exercice n°3:</u> (5 points)

1) On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$, où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Déterminer un couple d'entiers relatifs (u,v) tel que : $6u + 7v = 1$.
      En déduire une solution particulière de (E).
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).
      Justifier qu'un seul couple <u>d'entiers naturels</u> est solution de (E).
2) Soit le système $(S):\begin{cases} n \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 6) \\ n \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 7) \end{cases}$
   a) Montrer que : (n est solution de (S)) si et seulement si $\left(n \equiv 41(\mathrm{mod}(42))\right)$.
   b) En déduire l'ensemble des solutions de (S).
3) Le but de cette question est de déterminer tous les triplets (x,y,z) <u>d'entiers naturels</u> tels que : $6x+7y+8z=57$.
   a) Montrer que y est impair.
   b) On pose $y = 2p+1$ où $p \in \mathbb{N}$.
      Montrer que le reste de la division euclidienne de p+z par 3 est égal à 1.
   c) On pose $p+z = 3q+1$ où $q \in \mathbb{N}$.
      Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation $x+p+4q = 7$.
      En déduire que q prend la valeur 0 ou 1.
   d) Déterminer alors tous les triplets (x,y,z) cherchés.

<u>Exercice n°4:</u> (3 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AB =2.

Soit (C) le cercle de diamètre [AB] ; O le milieu de [AB] et F le point de (C) tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OF}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

($\mathscr{P}$) étant la parabole de foyer F et de directrice (AB).

$\mathscr{R}=\left(O,\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OI}\right)$: repère orthonormé du plan.

1) Déterminer les coordonnées du point F dans $\mathscr{R}$.
2) Montrer qu'une équation de ($\mathscr{P}$) dans $\mathscr{R}$ est $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \sqrt{3}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.
3) ($\mathscr{P}$) coupe (BC) en A'.
   a) Déterminer les coordonnées de A'.
   b) Montrer que (A'F) est la tangente à (C) en F.
4) (A'F) coupe (AD) en B'.
   Montrer que B' est un point de ($\mathscr{P}$).
   Construire ($\mathscr{P}$).