Lycée Ksar Hellal	DEVOIR DE SYNTHESE N° 2	4ème M
Mr : Boudhaouia	Durée 4h	06/03/2012

Exercice 1 (3 points)

Donner la réponse correcte sans aucune justification. Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que : $(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et I le milieu du segment $[AB]$

1) L'isométrie $S_{(BC)} \circ S_{(BD)} \circ t_{\overrightarrow{BD}}$ est :

a) une rotation b) une translation c) une symétrie glissante

2) L'isométrie $t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(BC)}$ est égale à

a) $t_{\overrightarrow{CD}} \circ S_{(OI)}$ b) $t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(OI)}$ c) $S_{(BC)}$

3) Soit R_1 la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et R_2 la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ alors $R_1 \circ R_2$ est :

a) S_A b) $t_{\overrightarrow{CB}}$ c) $t_{\overrightarrow{AD}}$

4) Soit S la similitude directe de centre B et telle que $S(D) = A$ alors :

a) $S(A) = O$ b) $S(I) = O$ c) $S(C) = O$

Exercice 2 (7 points)

Soit OAB un triangle tel que : $OA = 2\,OB$ et $(\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ .soit J et K les milieux respectifs des segments $[OA]$ et $[OB]$. On désigne par A' le symétrique de O par rapport à B, I le symétrique de J par rapport à O et H le projeté orthogonal de O sur la droite (AB).

A/

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R du plan tel que $R(A) = A'$ et $R(B) = I$.

b) Montrer que R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2) On pose : $G = R(H)$.

a) Montrer que G appartient à la droite (IA') et que les droites (OG) et (IA') sont perpendiculaires.

b) Construire alors le point G.

B/

Soit S la similitude directe qui transforme O en A et B en O.

1) a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Montrer que H est le centre de S.

c) Montrer que $S(K) = J$, en déduire que les droites (HK) et (HJ) sont perpendiculaires.

2) La perpendiculaire en A à la droite (OA) coupe la droite (HK) en C.

a) Montrer que : $S\langle (OA) \rangle = (AC)$.

b) Déduire que : $S(J) = C$.

c) Montrer que : $HC = OA = AC$.

C/

Soit $h = S \circ R^{-1}$, on désigne par L le symétrique de O par rapport à I.

1) Déterminer : $h(I)$ et $h(O)$.

2) Montrer que h est une homothétie et préciser son rapport.

3) Déterminer son centre.

Exercice 3 (4,5 points)

Soit la suite réelle U définie sur N^* par : $U_n = \int_1^0 \frac{x}{n + e^x} dx$.

1) a) Montrer que : $\forall n \in IN^*$ on a $U_n \leq 0$.

b) Montrer que la suite U est monotone.

c) Montrer que : $\forall n \in IN^*$, $\forall x \in [0 \ , \ 1]$ on a : $\frac{x}{n+3} \leq \frac{x}{n+e^x} \leq \frac{x}{n+1}$

d) En déduire que : $\forall n \in IN^*$ on a $\frac{-1}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{-1}{2(n+3)}$.

e) Déterminer la limite de la suite U.

2) Soit la suite V définie sur N^* par : $V_n = \sum_{k=1}^{n} |U_k|$.

a) Montrer que $\forall k \in IN^*$ on a : $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.

b) En déduire que $\forall n \in IN^*$ on a : $\sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k} \geq \ln(n+4) - \ln 4$.

c) En déduire que $\forall n \in IN^*$ on a : $V_n \geq \frac{1}{2}(\ln(n+4) - \ln 4)$.

d) Déterminer alors la limite de la suite V.

Exercice 4 (5,5 points)

Soit la fonction f définie sur $[0\ ,\ 1[$ par $f(x) = \ln\left(1 - \sqrt{x}\right)$. On désigne par ζ la courbe de f dans un dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f en 0.

b) Etudier les variations de f.

c) Tracer la courbe ζ; on précisera le point de ζ d'abscisse $\frac{1}{4}$.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0\ ,\ 1[$ sur un intervalle I qu'on déterminera.

b) Tracer dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe ζ' de la fonction f^{-1} réciproque de f.

3) a) Montrer que $\forall x \in I$; $f^{-1}(x) = (e^x - 1)^2$.

b) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe ζ', l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -\ln 2$ et $x = 0$.

c) En déduire la valeur de : $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln\left(1 - \sqrt{x}\right) dx$.