Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse des trois réponses proposées est correcte. Indiquer le numéro et la lettre correspondante à la réponse choisie.

Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère le point A d'affixe : $1+i$ et le point B d'affixe : $1+i\sqrt{3}$

1) L'image du point A par la translation de vecteur d'affixe $-2-2i$ est le point d'affixe :

a) $3-i$ b) $-1+3i$ c) $-3+i$

2) L'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est le point d'affixe

a) $-\sqrt{3}+i$ b) $-\sqrt{3}-i$ c) $\sqrt{3}-i$

3) Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $(-\ln 2)$. Alors la suite (V_n) définie par $V_n = e^{U_n}$ est :

a) une suite arithmétique de raison (-2).

b) une suite géométrique de raison $\left(\frac{1}{2}\right)$.

c) une suite géométrique de raison (-2).

4) La limite de : $x \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ quand x tend vers $+\infty$ est :

a) 0 b) 1 c) 2

Exercice 2 (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe (figure 1) OAB est un triangle rectangle et isocèle $OA = OB$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

On désigne par I le milieu du segment $[AB]$ et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B. Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

1) Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) a) Montrer que le point O est l'orthocentre du triangle ACD.

b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur la droite (AC). Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de la similitude directe f.

3) Soit g la similitude indirecte de centre I, qui envoie A sur D

a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire que $g(O) = C$.

b) Déterminer les images des points C et D par $g \circ f^{-1}$. Caractériser l'application $g \circ f^{-1}$.

4) Soit $I' = f(I)$ et $J' = g(J)$

a) Déterminer les images des points J et I' par : $g \circ f^{-1}$

b) En déduire que les droites (IJ), $(I'J')$ et (CD) sont concourantes.

Exercice 3 (5 points)

1) Dans l'annexe ci-jointe (figure 2), on représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{e}\,,e\right]$ par $f(x)=(\ln x)^3\ -3\ln x$ et les demi- tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses respectives $\frac{1}{e}$ et e.

a) En utilisant le graphique : montrer que f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e}\,,e\right]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Tracer, dans le repère $(O,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$; la courbe $\mathcal{C}$' représentative de la fonction f^{-1} réciproque de f.

2) Soit la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$a_n=\int_1^e(\ln x)^n\,dx$$

a) Vérifier que $a_1=1$

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $a_{n+1}=e-(n+1)a_n$

c) calculer alors a_2 et a_3.

3) Soit $\mathcal{A}$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x=-2$ et $x=0$ et par la courbe $\mathcal{C}$' et la droite d'équation $y=e$.

a) Calculer $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$

b) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Exercice 4 (6 points)

1) Soit la fonction g définie sur $]0\,,+\infty[$ par $g(x)=1+x-x\ln x$

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet dans $]0\,,+\infty[$ une unique solution α telle que : $3{,}5<\alpha<3{,}6$

c) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x\in\,]0\,,+\infty[$.

2) Soit la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe un repère orthonormé $(O,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

a) Vérifier que $\forall x\in\,]0\,,+\infty[$ on a :

$$f'(x)=\frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$$

b) Dresser le tableau des variations de f.

c) Vérifier que : $f\left(\sqrt{\alpha}\right)=\frac{1}{2\alpha}$

d) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ (on choisira 3 cm pour l'unité graphique).

3) Soit la suite réelle (a_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$a_n=\int_1^{\frac{1}{n}}f(x)\,dx$$

a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b) Montrer que : $\forall x \in \,]0\,,1]$ on a :

$$\ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}\ln x$$

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1+\ln(n)}{n}\right) \leq a_n \leq 1-\frac{1+\ln(n)}{n}$$

d) Montrer alors que la suite (a_n) est convergente et converge vers un réel ℓ et que $\ell \in \left[\frac{1}{2}\;;\;1\right]$.

Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

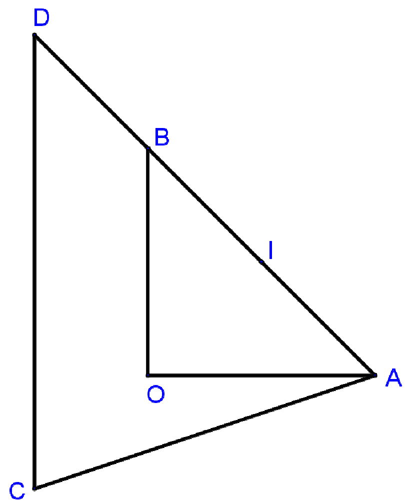

Figure 2