Exercice 1 (3 points)

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + 4x + 8y - 4 = 0$.

1) Montrer que $\mathcal{C}$ est une parabole et préciser son paramètre.

2) Déterminer ; relativement au repère R ; les coordonnées de son sommet S ; de son foyer F et une équation de sa directrice D.

3) a) Vérifier que $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est un point de $\mathcal{C}$.

   b) Déterminer ; relativement au repère R une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en A.

   c) Tracer la parabole $\mathcal{C}$ et sa tangente T.

Exercice 2 (3 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x}}$; on désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Justifier que IR_+ est le domaine de définition de la fonction f.

   b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

   c) Etudier les variations de f et tracer sa courbe $\mathcal{C}$.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de IR_+ sur un intervalle J que l'on déterminera.

   b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f ; calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

   c) Tracer la courbe $\mathcal{C}$'de la fonction f^{-1}.

Exercice 3 (4 points)

Soit la suite U_n définie sur IN* par : $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx$.

1) a) Calculer U_1 et U_2.

   b) Montrer que $\forall n \in IN^*$ on a : $U_n \geq 0$.

   c) Montrer que $\forall n \in IN^*$ on a : $U_{n+2} + U_n = \frac{1}{n+1}$.

   d) Calculer U_3 et U_4.

2) a) Montrer que la suite U est convergente.

   b) Calculer la limite de la suite U.

3) a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $(\tan x)^n \leq \frac{\sin x}{\cos^n x}$

   b) En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a : $U_n \leq \frac{1}{n-1}\left(\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} - 1\right)$.

Exercice 4 (5 points)

I) Soit la fonction g définie sur IR_+^*par :$g(x) = x + \ln x - 1$.

1) Etudier les variations de g.
2) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur IR_+^*.

II) Soit la fonction f définie sur IR_+^*par :$\begin{cases} f(x) = & \frac{x^2}{2} + x\ln x - 2x \quad si\ x > 0 \\ f(0) = & 0 \end{cases}$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Etudier la continuité de f en 0.
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
   c) Vérifier que :$\forall x \in IR_+^*$; $f'(x) = g(x)$.
   d) Dresser le tableau de variation de f.
2) Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation : $y = \frac{x^2}{2} - 2x$
   a) Etudier sur IR_+^* la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{P}$.
   b) Tracer dans le même repère $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.(L'unité graphique est : 2 cm).
   c) Soit λ un réel tel que :$0 < \lambda < 1$; calculer la mesure $\mathcal{A}(\lambda)$ de l'aire du domaine plan limité par $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$et les droites d'équations : $x = \lambda$ et $x = 1$.
   d) En déduire la mesure $\mathcal{A}$ de l'aire du domaine plan limité par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.

Exercice 5 (5 points)

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que :$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$.

1) Soit la similitude directe qui transforme D en O et C en I.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b) Construire son centre Ω.
2) a) Déterminer les images des droites (BD) et (BC) par S. En déduire que : $S(B) = A$.
   b) Montrer que $S(A) = J$.
   c) Déterminer : $(S \circ S)(B)$. En déduire que Ω est un barycentre des points B et J.
3) Soit σ la similitude indirecte qui transforme D en O et C en I. Et soit $S_{(OI)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OI).
   a) Vérifier que : $\sigma = S_{(OI)} \circ S$.
   b) Déterminer : σ (B).
   c) Déterminer les éléments caractéristique de la similitude σ.