Exercice 1 (3 points)

On considère l'équation différentielle $(E): y' - y = -(x-1)^2$.

1) Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer les réels a, b et c pour que g soit une solution de l'équation (E).
2) Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y' - y = 0$.
3) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0).
4) Déterminer alors les solutions de (E) .

Exercice 2 (4 points)

Soit P un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Soit f l'application de P vers luis même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \sqrt{2}\, i\, \bar{z} - \sqrt{2}\, i$
   a) Montrer que f est une similitude indirecte et préciser son rapport et l'affixe de son centre Ω .
   b) Déterminer une équation cartésienne de son axe Δ .
2) Soit g l'application de P vers luis même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -i\, \bar{z} + 3$.
   a) Montrer que g est un antidéplacement.
   b) Soit M'' d'affixe z'' l'image de M par $g \circ g$, exprimer z'' en fonction de z .
   c) En déduire que g est une symétrique glissante et préciser l'affixe de son vecteur.
3) Soit l'application h de P vers luis même qui à tout point M de coordonnées (x, y)telle que : $\begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$.
   a) On désigne par z l'affixe de M et par z' l'affixe de M' exprimer z' en fonction de .
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h.

Exercice 3 (4 points)

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que :$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ (on prend $AB = 5\ cm$).

Soit le point I du plan tel que le triangle CAI est isocèle en C et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

1) Soit r_A la rotation de centre A et qui transforme B en C ; r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose $f = r_C \circ r_A$.

   a) Déterminer une mesure de l'angle de r_A.

   b) Montrer que f est une rotation et donner une mesure de son angle.

   c) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$ et construire le centre O de la rotation .

   d) Montrer que le quadrilatère $ABOC$ est un parallélogramme.

2) Soit S la similitude directe de centre O qui transforme A en B et soit $= B * C$.

   a) Déterminer une mesure de l'angle de S.

   b) On pose $S(C) = C'$; montrer que $C' \in (OA)$.

   c) On pose $S(H) = H'$; montrer que $H' = O * B$.

   d) Déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

Exercice 4 (4 points)

Soit la fonction F définie sur $]0\,,+\infty[$ par :$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$.

1) Montrer que F est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et que F est strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$\forall x \in\ ]0\,,+\infty[\ \ F(x) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,dt$.

   b) En déduire que $\forall x \geq 1$ on a : $F(x) \geq \frac{e^x}{x} - e$.

   c) En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$.

3) a) Montrer que $\forall x \in\ ]0\,,1]$ on a :$F(x) \leq \ln x$.

   b) En déduire $\lim_{x\to0^+} F(x)$.

4) Donner l'allure de la courbe C de F, on précisera sa tangente au point d'abscisse 1.

Exercice 4 (4 points)

1) Soit la fonction u définie sur IR par : $u(x) = e^x - x$.
   a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} u(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} u(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de u.
   c) En déduire que : $\forall x \in IR$, $(ux) > 0$.
2) Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = (2 - x)e^x - 1$.
   a) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$
   b) Dresser le tableau de variation de g.
   c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions ; on notera par α la solution qui appartient à l'intervalle $]-\infty\,, 1]$ et par β l'autre solution.
   d) Fn déduire le signe de $g(x)$ sur IR.
3) Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x}$.
   a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ et que $f(\beta) = \frac{1}{\beta-1}$.
   c) Vérifier que $\forall x \in IR$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$.

d) Tracer dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm) la courbe de f
On prendra $\alpha = -1{,}1$ et $\beta = 1{,}8$.