Lycée 2 Mars Ksar - Hellel
Prof : Mandhouj .M

**Devoir de synthèse n° 1**
Durée : 3 Heures

$4^{ème}$ $M_2$
Le 8/12/2010

## Exercice1(5pts)

Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{\sqrt{3+u_n^2}}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \le u_n < 1$
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \ge \dfrac{1+u_n}{2}$ $\quad(1)$
3) a/ En utilisant l'inégalité $(1)$, montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
   b/ En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite.
4) a/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : 1 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(1 - u_n)$
   b/ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $1 - u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\quad(2)$
   c/ Retrouver alors la limite de la suite $(u_n)$
5) a/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \le u_n < 1$ (utiliser l'inégalité $(2)$ )
   b/ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \le \sum_{k=1}^{n} u_k < n$.
   c/ déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k\right)$

## Exercice2 (4pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 2z + 1 - e^{i2\theta} = 0$, $\theta \in ]0, \pi[$.
3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .On désigne par M et N les points d'affixes respectives $z_M = 1 + e^{i\theta}$ et $z_N = 1 - e^{i\theta}$.
   a/ Déterminer l'ensemble E des points M lorsque $\theta$ décrit l'intervalle $]0, \pi[$.
   b /Donner la forme exponentielle de $z_M$ et $z_N$
   c/Montrer que OMN est un triangle rectangle en O.

## Exercice3(3pts)

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Soit $\Delta$ la parallèle à (AB) menée par C.

1) Comparer $S_{(BC)} \circ S_{(CA)}$ et $S_{\Delta} \circ S_{(BC)}$
~~2)~~ Soit $f = S_{(BA)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(CA)}$
   Montrer que f est une symétrie glissante dont on donnera les éléments caractéristiques

## Problème (8 pts)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a/ Dresser le tableau de variation de f
   b/ Construire la courbe $\mathscr{C}$
2) a/ Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0,2[$ . On note g la fonction réciproque de f.
   b/ construire la courbe $\mathscr{C}'$ de g dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
   c/ Montrer que g est dérivable sur $]0, 2[$
   d/ Etudier la dérivabilité de g ~~à droite en~~ 2. à droite en 0.
   gauche
   e / Expliciter g.
3) Pour tout $x \in [0, \pi[$ on pose $h(x) = g(1 - \cos x)$
   a/ Montrer que pour tout $x \in [0, \pi[$ on a : $h(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

b / Montrer que h réalise une bijection de $[0, \pi[$ sur $[0, +\infty[$. On note $h^{-1}$ sa fonction réciproque.

c/ Montrer que $h^{-1}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $(h^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

4) On pose $H(x) = h^{-1}(x) + h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in ]0, +\infty[$.

a/ Montrer que pour tout $x \in ]0, +\infty[$ $H'(x) = 0$

b/ Calculer $h\left(\frac{\pi}{2}\right)$. En déduire que pour tout $x \in ]0, +\infty[$ on a : $h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \pi - h^{-1}(x)$

**Fin**