

Mr Hédi Ayache	Devoir de synthèse N°1	Durée : 3 H
4M	Épreuve : Mathématiques	8 Déc 2009

Exercice 1:

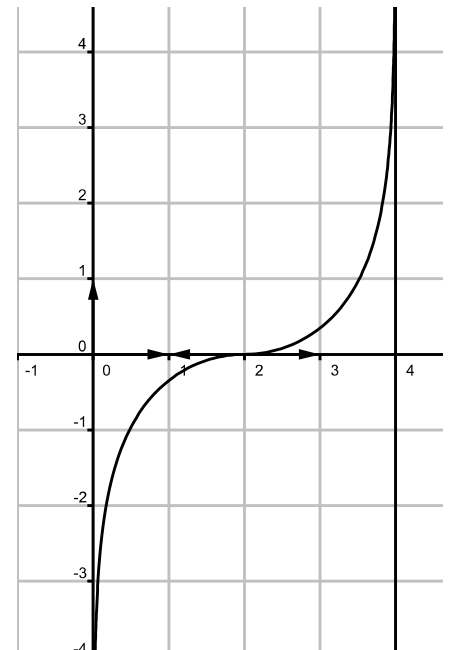
Soit dans \mathbb{C} les équations $(E) : z^2 - 2z + 2 = 0$. ; $(E') : z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i = 0$.

1. Résoudre l'équation (E) .
2. Résoudre l'équation (E') sachant qu'elle admet deux solutions complexes conjuguées.

Exercice 2:

On donne ci-contre la courbe (\mathcal{C}_f) d'une fonction f dérivable sur son domaine de définition.

1. a) Dresser le tableau de variation de f .
b) Déduire que f est une bijection.
c) Dresser le tableau de variation de f^{-1} .
2. a) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} .
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x) - 2}{x}$. Justifier.
c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur son domaine de définition.



Exercice 3:

Soit ABC un triangle direct et A' le milieu du segment $[BC]$.

Soient P et Q les deux points définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} PA = PC \\ (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} QB = QA \\ (\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right.$$

On désigne par Ω le milieu du segment $[PQ]$, I le milieu du segment $[QA']$, J le milieu du segment $[PA']$ et P' le symétrique de P par rapport à A' .

On désigne par R_P et R_Q les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre respectifs P et Q .

On pose $f = R_Q \circ S_{A'} \circ R_P$.

1. a) Déterminer $f(A)$. Caractériser alors f .
b) Montrer que $R_Q(P') = P$.
2. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement φ tel que $\varphi(A') = Q$ et $\varphi(P) = A'$.
b) Caractériser φ .
c) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h = \varphi \circ S_{(A'Q)}$.
3. Soit ψ l'antidépacement qui envoie A' sur Q et P sur A' .
a) Montrer que $\psi(J) = I$.
b) Montrer que ψ est une symétrie glissante.
c) Déterminer les éléments caractéristiques de ψ .
4. Soit M un point du plan. On pose $\psi(M) = M_1$ et $\varphi(M) = M_2$. Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on déterminera.

Exercice 4:

Soit u la suite définie sur \mathbb{N}^* par
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2+nu_n} \end{cases} .$$

1. a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 - \frac{1}{2n} \leq u_n \leq 1 - \frac{1}{2n+1}$.
b) Dédire que u est une suite convergente et calculer sa limite.
c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - u_n) = \frac{1}{2}$.
2. Soit v la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_n}$.
a) En utilisant un encadrement de u_{n+1} , montrer que u est une suite croissante.
b) Dédire u et v sont deux suites adjacentes.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite (S_n) , par $S_n = \sum_{k=1}^n (1 - u_k)(v_k - 1)$.
a) Montrer que (S_n) est une suite croissante.
b) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{2k(2k+1)} \leq (1 - u_k)(v_k - 1) \leq \frac{1}{2k(2k-1)}$.
c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq S_n \leq \frac{1}{4} \left(3 - \frac{1}{n}\right)$.
Dédire que (S_n) est une suite convergente et donner un encadrement de sa limite.