Exercice 1
(3 points)

Pour chacune des questions, une seule réponse parmi les trois est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante .Aucune justification n'est demandée.

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. soit f l'application du plan $\mathscr{P}$ dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = ie^{i\frac{2011\pi}{2}}z + 1$. Alors f est :
   A. une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ B. une symétrie centrale C. une translation
2. Soit Δ_1, Δ_2 et Δ_3 trois droites strictement parallèles. L'isométrie $S_{\Delta_1} o S_{\Delta_2} o S_{\Delta_3}$ est :
   A. une symétrie orthogonale B. une symétrie glissante C. une rotation
3. Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Le tableau suivant et le tableau de variation de la fonction dérivée f' de f.
   A. $\mathscr{C}_f$ admet exactement deux tangentes horizontales
   B. $\mathscr{C}_f$ admet exactement deux points d'inflexions
   C. f est strictement décroissante sur $]-\infty, -2]$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	-1 ↗	3 ↘	-1

Exercice 2
(3 points)

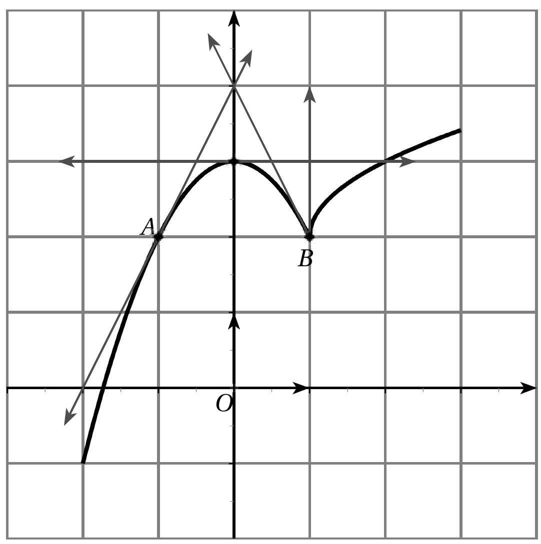
Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

Soit $\theta \in [0, 2\pi]$ et soit dans $\mathbb{C}$ l'équation, $(E_\theta) : z^2 - \left[1 + i + (1 - i)e^{i\theta}\right]z + (1 + i)e^{i\theta} - ie^{i2\theta} = 0$

1. Vérifier que $z_1 = e^{i\theta}$ est une solution de (E_θ) et déduire l'autre solution z_2
2. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $1 + i - ie^{i\theta}$.
   (a) Caractériser l'application f qui à tout point $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que $z' = -iz + 1 + i$
   (b) Vérifier que $f(M_1) = M_2$
   (c) Déterminer l'ensemble décrit par M_1 lorsque θ décrit $[0, 2\pi]$. En déduire l'ensemble décrit par M_2 lorsque θ décrit $[0, 2\pi]$
   (d) Vérifier que $z_{M_2} - z_{M_1} = (1 + i)\left(1 - e^{i\theta}\right)$. En déduire les valeurs de θ pour que M_2 soit l'image de M_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A d'affixe $-2i$ et B d'affixe 2

Exercice 3
(4 points)

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentée ci-contre est la courbe représentative d'une fonction f sur $[-2, 3]$. On sait que : f est continue sur $[-2, 3]$ et dérivable sur $[-2, 1]$ et $]1, 3]$



1. Déterminer graphiquement :
   $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$
2. Déterminer graphiquement : $f'(-1)$.
   En déduire : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f\left(x^2 - 1\right) - 2}{x}$
3. Soit g la restriction de f sur $[-2, 0]$ et g^{-1} sa fonction réciproque.
   (a) Déterminer $g^{-1}(2)$ et $\left(g^{-1}\right)'(2)$
   (b) Dans l'annexe à rendre avec la copie on a représenté la courbe de g.
   Représenter dans le même repère la courbe de g^{-1}.

Exercice 4

(5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}\ ,\ \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et on désigne par O le milieu du segment [BC] (Voir figure donnée en annexe, que l'on complètera au fur et à mesure)

1. Montrer que le triangle OCA est équilatéral.
2. (a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O sur A et B sur C.
   (b) Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle. Construire son centre I sur la figure donnée en annexe.
   (c) En calculant $\left(\widehat{\overrightarrow{IB}\ ,\ \overrightarrow{IO}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IO}\ ,\ \overrightarrow{IA}}\right)$, montrer que I appartient au segment [AB]
3. Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   (a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f oR$.
   (b) Soit C' l'image de C par f.
   Déterminer $(f oR)(C)$. En déduire que A est le milieu du segment $[CC']$
4. (a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g tel que $g(O) = A$ et $g(B) = C$.
   (b) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.
   (c) Montrer que $g(C) = C'$

Exercice 5

(5 points)

Soit f, la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1 + sin(\pi x)$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ sur $[0,2]$.
2. On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f.
   (a) Déterminer $f^{-1}(1)$
   (b) Montrer que que f^{-1} est dérivable sur $]0,2[$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{2x - x^2}}$
3. On pose pour tout $x \in [0,2]$, $g(x) = f^{-1}(2-x) + f^{-1}(x)$.
   (a) Montrer que g est dérivable sur $]0,2[$ et que pour tout $x \in]0,2[$, $g'(x) = 0$
   (b) En déduire que pour tout $x \in [0,2]$, $f^{-1}(2-x) = -f^{-1}(x)$
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1 + \dfrac{1}{n+k}\right)$ et $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1 - \dfrac{1}{n+k}\right)$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.et soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$
      i. Montrer que Montrer que, $\dfrac{2n+1}{2n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n+k} \leqslant \dfrac{n+1}{n}$
      ii. En déduire que, $f^{-1}\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right) \leqslant f^{-1}\left(1 + \dfrac{1}{n+k}\right) \leqslant f^{-1}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, $\dfrac{n+1}{n} f^{-1}\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right) \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n} f^{-1}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n) puis la limite de la suite (v_n).

↜ ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE ↝

Nom et Prénon : ....