Exercice 1 (5 points)

Soit a un paramètre complexe de module 2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

(E_a): $z^3 + (3 - a^2)z + 2i(1 + a^2) = 0$

1) **a)** Vérifier que $2i$ est une solution de l'équation (E_a).

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_a).

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, M et N d'affixes respectives : $2i$, $-i$, $-i + a$ et $-i - a$.

a) Calculer MN et déterminer le milieu du segment $[MN]$.

b) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles A, M et N soient alignés.

3) Si les points A, M et N ne sont pas alignés :

a) Montrer que le point O est le centre du triangle AMN.

b) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le triangle AMN soit isocèle en A.

Exercice 2 (7 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = 10 + \frac{1}{x^2}$

1) **a)** Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Déterminer $f(\mathbb{R}_+^*)$.

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = f(x) - x$

a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle que l'on déterminera.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une unique solution α telle que $\alpha \geq 10$.

3) Soit la suite réelle (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 10$

b) Montrer que $\forall x \geq 10$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{500}$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{500}|U_n - \alpha|$$

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{500}\right)^n |U_0 - \alpha|$

e) Déterminer alors la limite de (U_n).

Exercice 3 (8 points)

Soit la fonction f définie sur $[0\,,1]$ par : $f(x) = \frac{1}{\pi}\left(1 + \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\right)$.

1) **a)** Montrer que f est dérivable sur $[0\,,1]$.

b) Vérifier que $\forall x \in [0\,,1]$ on a : $f'(x) = x\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) **a)** Montrer que f réalise une bijection de $[0\,,1]$ sur $\left[\frac{1}{\pi}\,,\frac{2}{\pi}\right]$.

b) Montrer que la fonction f^{-1} réciproque de f est dérivable sur $\left]\frac{1}{\pi}\,,\frac{2}{\pi}\right[$.

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en $\frac{1}{\pi}$ et $\frac{2}{\pi}$

d) Calculer $f^{-1}\left(\frac{3}{2\pi}\right)$ et $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2\pi}\right)$

3) Soit la fonction g définie sur $[0\,,1]$ par $g(x) = f(x) - x$

a) Montrer que $\forall x \in]0\,,1[$ on a : $0 < f'(x) < 1$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[0\,,1]$ une unique solution α

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,,1]$.

4) Soit la suite réelle (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2}\alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq \alpha$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.