

Exercice n°1 : (4 points)

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2}.$$

2. On pose $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}}{4x - \pi}$.

Exercice n°2 : (7 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \cos 2x + \sin 2x$.

1. a) Montrer que pour tout réel x , on a : $f(x) = \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Préciser la période de f . En déduire son domaine d'étude.

2. Résoudre dans $[0, \pi]$ chacune des équations : $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$.

3. a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.

b) Tracer ζ_f , la courbe représentative de f , pour $x \in [-\pi, \pi]$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4. On pose pour tout réel x , $g(x) = \sin 2x - 2 \sin^2 x$.

a) Montrer que pour tout réel x , $g(x) = f(x) - 1$.

b) Tracer alors ζ_g dans le même repère que ζ_f pour $x \in [-\pi, \pi]$.

Exercice n°3 : (9 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 1, 1)$, $B(1, -2, -2)$ et $C(3, 1, 0)$.

1. a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrer que le vecteur $\vec{n} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ est un vecteur normal du plan $\mathcal{P} = (ABC)$.

c) Déterminer alors une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

2. Soit $\mathcal{D}$ la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ en A

Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

3) Soient $E(4, 0, 3)$ et $\mathcal{Q}$ le plan passant par E et parallèle à $\mathcal{P}$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$.

b) Vérifier que la droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{Q}$.

c) Calculer les coordonnées du point H intersection du plan $\mathcal{Q}$ et la droite $\mathcal{D}$.

d) En déduire la distance du point E à la droite $\mathcal{D}$.

4. Soit Δ la droite de l'espace définie par $\Delta : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$

a) Montrer que Δ est incluse dans $\mathcal{Q}$.

b) Montrer que Δ et $\mathcal{D}$ ne sont pas coplanaires.