Prof : M^{me} S Younes   Lycée 2 Mars 1934 Ksar Hellal

4ème Sc Exp   Devoir de contrôle 2   durée 2 h   03/02/23

<u>*Exercice 1*</u> (8,5 pts)

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = a + \frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}$

I) Sachant que C_f passe pour le point $A(0\,,1)$ et que la droite Δ d'équation $y = 3$ est une asymptote de C_f au voisinage de $+\infty$, trouver les réels a et b.

C_f étant la courbe de f dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

II) Dans toute la suite de l'exercice on donne $f(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) a) Montrer que : $f'(x) = \frac{2}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variations de f et montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,,3[$.

c) Montrer que f^{-1} réciproque de f est dérivable sur $]-1\,,3[$ et trouver $(f^{-1})'(1)$.

2) a) Montrer que le point $A(0\,,1)$ est un centre de symétrie de C_f.

b) Montrer que la tangente T à C_f en A a pour équation : $y = 2x + 1$.

a) Etudier la position de C_f et T.

3) a) Montrer que pour tout réel $x \in [1\,,+\infty[$ on a : $f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\in [1\,,+\infty[$.

c) Vérifier que $2{,}8 < \alpha < 2{,}9$.

4) Tracer C_f , $C_{f^{-1}}$ et T dans le même repère (on prendra $\alpha \simeq 2{,}85$)

5) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|U_0 - \alpha|$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n |U_0 - \alpha|$

d) En déduire que U converge et trouver sa limite.

7) Trouver une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (4 pts)

Les questions 1) et 2) sont indépendants

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$

   b) Vérifier que $z_0 = 1 + i$ est une racine cubique de$(-2 + 2i)$

   c) Montrer que : $z^3 = -2 + 2i \Leftrightarrow \left(\frac{z}{1+i}\right)^3 = 1$

   d) Utiliser ce qui précède pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -2 + 2i$

2) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 2i\cos\theta\, z - 1 = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$

   a) Vérifier que $z_1 = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$ est une solution de l'équation (E).

   b) En déduire sans résoudre l'équation (E) la que deuxième solution est $z_1 = e^{i\left(-\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$

   c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 2i\cos\theta\, z^2 - 1 = 0$

Exercice 3 (7,5 pts)

Pour chacune des questions suivantes, donner l'unique bonne réponse (en le justifiant).

1) Si $f(x) = \cos(2x - 3) + x$ pour $x \in \mathbb{R}$ alors une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est :

   a) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin(2x - 3) + c$

   b) $F(x) = \frac{1}{2}[x^2 + \sin(2x - 3)] + c$

   c) $F(x) = \frac{1}{2}[x^2 - \sin(2x - 3)] + c$

2) Soit $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ .On admet que h réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ alors on a :

   a) $h^{-1}(x) = \sqrt{1 - x^2}$

   b) $h^{-1}(x) = -\sqrt{x^2 - 1}$

   c) $h^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

3) Soit $g(x) = \sin x$. On admet que h réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$ alors on a :

   a) $(g^{-1})'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

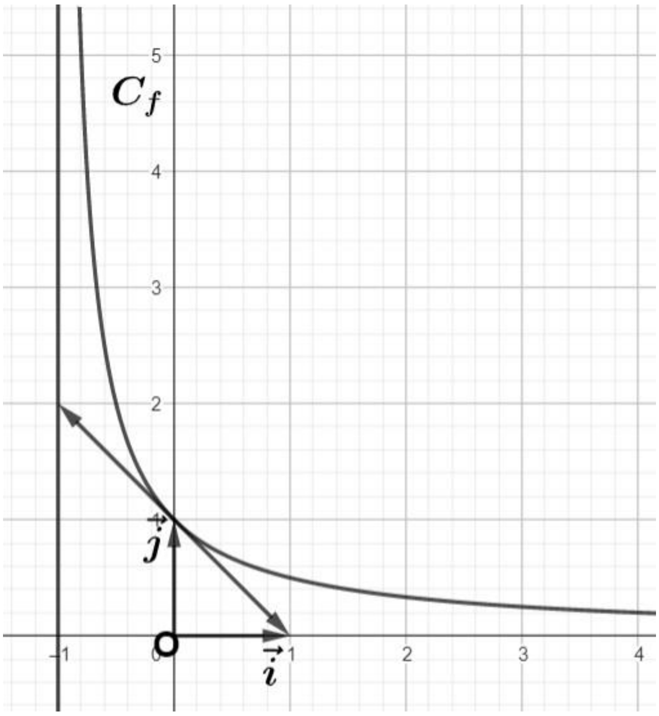
   b) $(g^{-1})'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

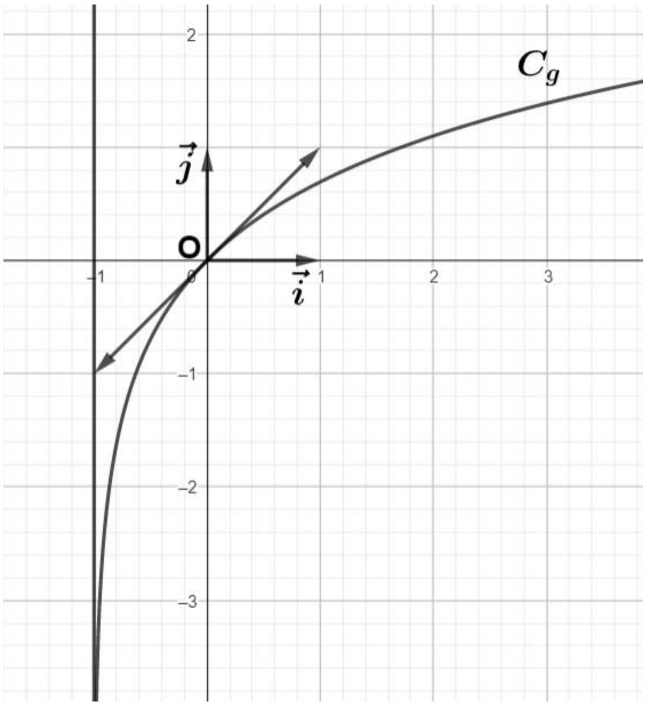
   c) $(g^{-1})'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}$

4) Si k est une fonction dérivable sur $[-2, 5]$ telle que $1 \le k'(x) \le 11$ alors on a:

   a) $3 \le k(4) - k(1) \le 33$ b) $1 \le k(4) - k(0) \le 11$ c) $2 \le k(-1) - k(1) \le 22$

5)





f et g étant les fonctions définies $]-1\,,+\infty[$ dont les courbes sont représentées ci-dessus, alors on a :

a) $g = f'$ b) $f = g'$ c) $g = f''$

6) h est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont le tableau de variations est donné ci-dessous

x	$-\infty$		0		1		4		5		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	10	$\nearrow$	13	$\nearrow$	$+\infty$

a) l'équation $h'(c) = 3$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

b) l'équation $h'(c) = 3$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

c) l'équation $h'(c) = 3$ admet au moins deux solutions dans $\mathbb{R}$