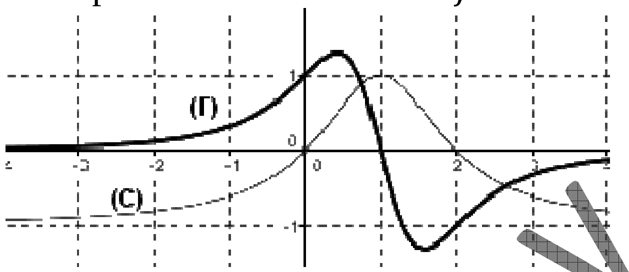
Lycée Said Boubaker Moknine Devoir de contrôle n°2 Prof : Naija Yosra	Niveau : 4 sciences expérimentales Epreuve : Mathématiques Durée : 2h / date: 10/2/2014

Exercice 1: (3 points)

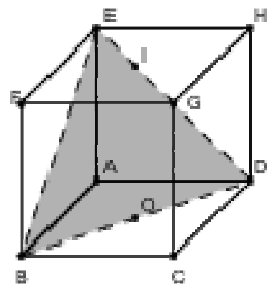
Soit f une fonction continue sur $[-4,4]$ et F une primitive de f sur $[-4,4]$

Les courbes données ci-dessous représentent les fonctions f et F dans un repère orthonormé.



1) Identifier la courbe de f et celle de F.
2) On admet que la fonction G définie sur $[-4,4]$ par $G(x) = \frac{2}{x^2-2x+2}$ est une primitive de f
   a) Déterminer $F(x)$
   b) Expliciter $f(x)$

Exercice 2: (6 points)



On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre. Soit O etI les centres respectifs des carrés ABCD et EFGH. L'espace est muni du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Pour tout réel α différent de 1, on note $M\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \alpha\right)$

1) **a)** Vérifier que $O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

   b) Déterminer l'ensemble des points Mde l'espace lorsque α décrit $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

2) **a)** Montrer qu'une équation du plan (EBO) est : $x + y + z - 1 = 0$

   b) Calculer l'aire du triangle EBO

   c) Pour quelle valeur de α la distance de M au plan (EBO) est –elle égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$?

   d) En déduire le volume du tétraèdre $AEBO$

3) Déterminer les valeurs de α pour que le volume du tétraèdre $EBOM$ soit égal à $\frac{1}{4}$

Exercice 3: (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

1) Montrer que f admet sur $[0,1[$ une unique primitive F qui s'annule en 0
2) On considère la fonction g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = F(sin^2 x)$

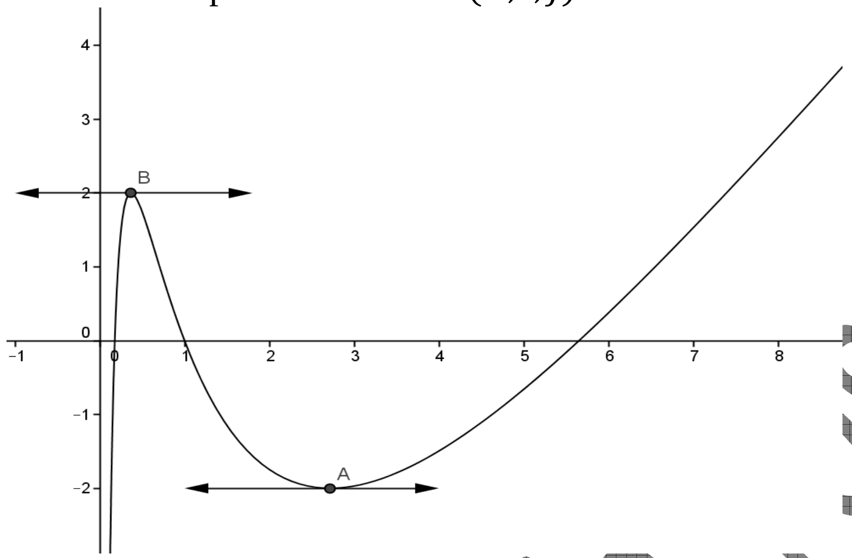
   a) Montrer que g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

   b) Prouver que pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ $g'(x) = 1 - cos(2x)$

   c) En déduire $g(x)$ pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

   d) Calculer $F\left(\frac{1}{2}\right)$

Exercice 4: (6 points)
Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = ln^3 x - 3\ln x$ et (C) une partie de sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ donnée ci-dessous



1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus

c) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0,+\infty[$

d) En déduire les valeurs exactes des coordonnées des points A et B de (C)

2) Soit g la restriction de f sur $[e,+\infty[$

a) Par lecture graphique, montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $[-2,+\infty[$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{g^{-1}(x)-\mathrm{e}}{x+2}$

3) a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul l'équation $g(x) = \frac{1}{n}$ admet dans $[e,+\infty[$ une unique solution qu'on note α_n

b) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n>0}$ est décroissante

c) Prouver que la suite (α_n) est convergente vers un réel l que $l \in]5\,,6[$