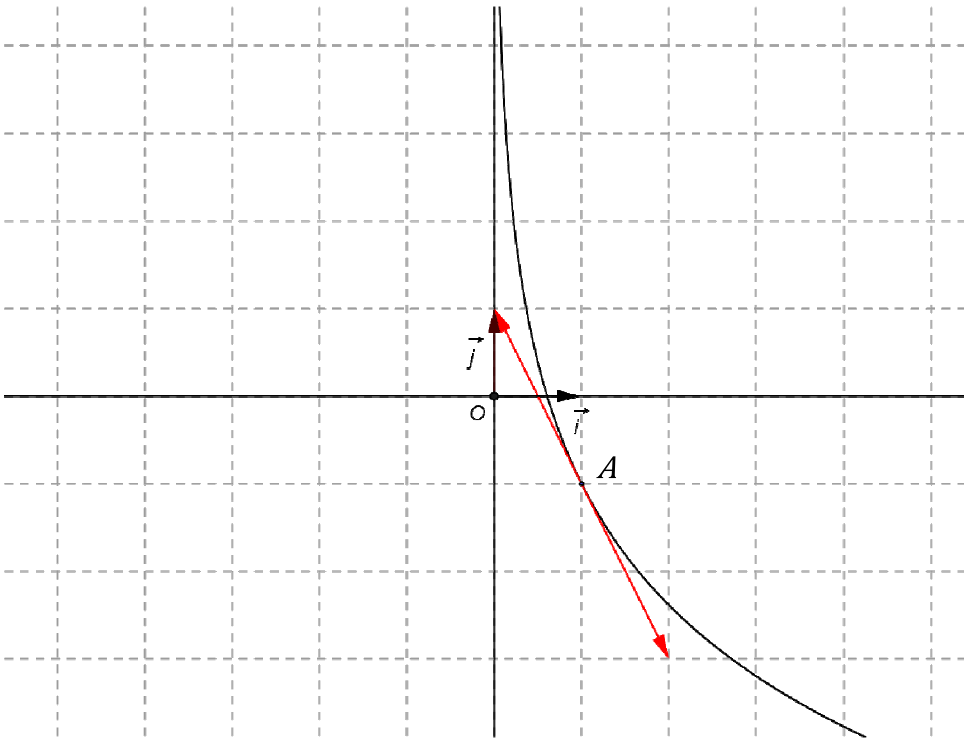
Lycée secondaire Bach Hamba - Bizerte	Classe : $4^{ème}$ Sciences expérimentales₁	
Prof: Mme Bayoudh	Date : 06/02/2013	Durée : 2 heures
Devoir de contrôle n °2 en mathématiques	Nom et prénom :	

Exercice 1 : (4 points)

Dans le graphique ci- dessous , on a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f décroissante sur $]0,+\infty[$ ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(1,-1)$

La droite d'équation $x=0$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$.

On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f sur $]0,+\infty[$



A/ Pour chacune des questions suivantes , une seule réponse est correcte , indiquer laquelle .

Aucune justification n'est demandée

1) f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur : ☐ $]0,+\infty[$ ☐ IR ☐ $]-\infty,0[$

2) $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) =$ ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 0

3) $(f^{-1})'(-1) =$ ☐ -2 ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ 2

4) L'équation $f^{-1}(x)=0$ admet :
☐ aucune solution ☐ une unique solution ☐ deux solutions

B/ Tracer dans le même repère la courbe représentative de f^{-1}.

Exercice 2: (5,5 points)

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} - 1$

1) a/ Montrer que g est dérivable sur IR et que pour tout $x \in IR$, $g'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}^3}$

   b/ Montrer que g réalise une bijection de IR sur $]-2, 0[$.

   c/ En déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in IR$.

2) On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g sur IR

   a/ Justifier la dérivabilité de g^{-1} sur $]-2, 0[$.

   b/ Calculer $g(1)$ puis $(g^{-1})'(-\dfrac{1}{2})$

3) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \sqrt{x^2+3} - x$

   a/ Vérifier que pour tout $x \in IR$, $f'(x) = g(x)$.

   b/ Déduire de la question 1)c/ , les variations de f sur IR.

   c/ Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on déterminera.

4) On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f sur IR.

   Expliciter $f^{-1}(x)$.

Exercice 3 : (4,5 points)

On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$

tel que $AB = 1$, $AD = 2$ et $AE = 1$.

Soit I le milieu du segment $[AD]$

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE}\right)$

1) a/ Déterminer les coordonnées de I , F, G et H dans le repère choisi

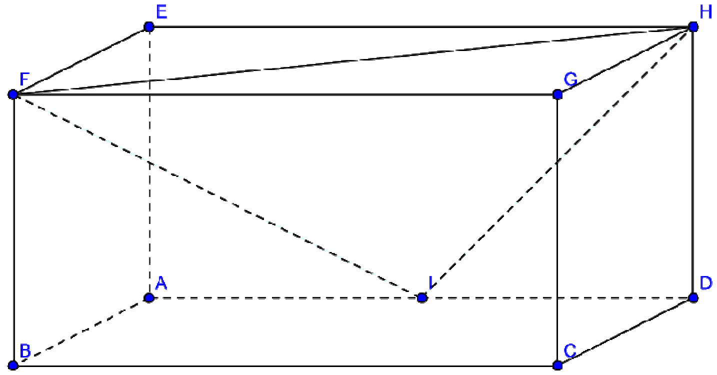
   b/ Calculer $\overrightarrow{FI} \wedge \overrightarrow{FH}$. En déduire l'aire du triangle FIH.

2) a/ Calculer le volume du tétraèdre $GFIH$

   b/ Montrer que la distance du point G au plan (FIH) est égale à $\frac{2}{\sqrt{6}}$

3) Soit S la sphère de centre G et de rayon 1.

   Préciser la position relative de S et de chacun des plans : (IFH) , (ABC) et (ABF).



Exercice 4 : (6 points)

L'espace est rapportée à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(-1,0,0)$, $B(1,0,2)$ et $C(3,-2,2)$

1) a/ Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Déduire que les points A , B et C déterminent un plan $\mathcal{P}$.

   b/ Montrer qu'une équation du plan $\mathcal{P}$ est : $x + y - z + 1 = 0$

2) Soit S la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2z - 1 = 0$

   a/ Déterminer le centre I et le rayon R de S

   b/ Montrer que $S \cap \mathcal{P}$ est le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC.

   c/ Déterminer le centre H et le rayon r du cercle $\mathcal{C}$.

3) Soit la droite Δ : $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 0 \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in IR)$

   a/ Calculer la distance du point I à la droite Δ .

   b/ En déduire que Δ est tangente à la sphère S.

4) Montrer que pour tout point M de Δ , le volume du tétraèdre $MABC$ est constant.

Bon travail et bonne chance