L.S.C.J.Gafsa | **Date:** 21 Février 2011 | **Classe:** 4è.Math 2
Prof: B.Tabbabi | **DEVOIR DE CONTROLE N°2** | **Durée:** 2 heures

Exercice 1: *(3 points)*

Répondre par " vrai" ou "faux" (aucune justification n'est demandée).

1. $\int_0^1 \frac{dt}{2+t^2} = 2$;

2. Si f est une fonction continue et positive sur IR ,alors pour tous réels a et b , $\int_a^b f(t)\,dt$ est positive.

3. Toute similitude admet un unique point fixe

Exercice 2: *(6 points)*

Soit n un entier naturel non nul.On pose $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$.

1. Vérifier que $I_1 = \frac{2}{3}$ et que $I_2 = \frac{2}{3}.\frac{4}{5}$.

2. Vérifier que $I_n - I_{n+1} = \int_0^1 x^2(1-x^2)^n\,dx$.

3. a. Au moyen d'une intégration par parties,montrer que $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$.

 b. Montrer alors, par récurrence, que pour tout n de IN* on a: $I_n = \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}.......\frac{2n}{2n+1}$.

4. On considère les deux fonctions définies sur IR par $F(x) = \int_0^{\sin x} (1-t^2)^n\,dt$ et $G(x) = \int_0^x \cos^{2n+1} t\,dt$.

a. Montrer que F et g sont dérivables sur IR et déterminer F ' (x) et G ' (x).
b. En déduire que pour tout x de IR on a: F(x) = G(x).

c. En déduire que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\,dt$.

Exercice 3: *(6 points)*

Soit ABC un triangle rectangle en B de sens direct tel que AB = 2 et BC = 3.
1. Soit f la similitude directe qui envoie A sur B et B sur C.
a. Déterminer l'angle et le rapport de f.
b. Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC).Montrer que H est le centre de f.
2. Soit D = f (C).Montrer que D appartient à la droite (BH) puis construire D.
3. Soit g la similitude indirecte qui envoie A sur B et B sur C.On désigne par Ω le centre de g.
a. Montrer que $f \circ g^{-1} = S_{(BC)}$.
b. Soit E = g (C).Déterminer $S_{(BC)}(E)$ .Construire alors E.
c. Préciser la nature de $g \circ g$ .Montrer que Ω appartient à (AC) et à (BE).
d. Construire alors Ω et l'axe Δ de g.

Exercice 4: *(5 points)*

On considère la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{1+\sin x}$.

1. Vérifier que pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a: $f'(x) = \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$.

2. Montrer alors que f realise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3. On note f^{-1} la function réciproque de f. Calculer $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ et $f^{-1}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)$.

4. Montrer que f^{-1} est derivable sur $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ et que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-2x}}$ pour tout x de $\left[0,\frac{1}{2}\right[$.

* * * * * * *

Bon travail