Lycée secondaire: Intilaka *Devoir de contrôle n°2 Mathématiques* *4ème Math*

Prof : Mr H Jouirou *Date : 05-02-2013* *Durée : 2 h*

Exercice 1

1) Si σ et φ sont deux similitudes directes de rapports inverses et d'angles respectifs $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$ alors σ o φ est

a) un antidéplacement **b)** une translation **c)** une rotation

2) L'écriture complexe d'une similitude indirecte de centre $\Omega\ (1+i)$ de rapport 3 et d'axe la droite $\Delta : y = -x + 2$ est :

a) $z' = 3i\bar{z} + 1 + i$ **b)** $z' = \overline{3iz} + 4 + 4i$ **c)** $z' = 3i\bar{z} + 2 - 2i$

3) Soit ABC untriangle direct isocèle rectangle en A et $I = A * C$. La similitude indirecte de centre A qui transforme B en I a pour rapport k et d'axe Δ

a) $k = \frac{1}{2}$ et Δ est la médiatrice de $[BC]$

a) $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et Δ est la bissectrice intérieure de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}\right)$

a) $k = \sqrt{2}$ et Δ est la médiatrice de $[BC]$

4) L'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x \ dx$ est égale à :

$a)\ 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x \ dx$ $b)\ 0$ $c)\ \int_0^{\frac{2\pi}{3}} x^2 \sin x \ dx$

Exercice 2

On considère dans le plan orienté un triangle isocèle ABC de sommet principale A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. On désigne par I le milieu de $[BC]$ et par J le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). Soit S la similitude indirecte de centre C qui transforme A en B.

1) **a)** Montrer que le rapport de S est $\sqrt{3}$.

b) Préciser l'axe Δ de S.

2) Soit $B' = f(B)$.

a) Préciser la nature et les élèments caractéristiques de S o S.

b) En déduire que $\overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{CA}$.

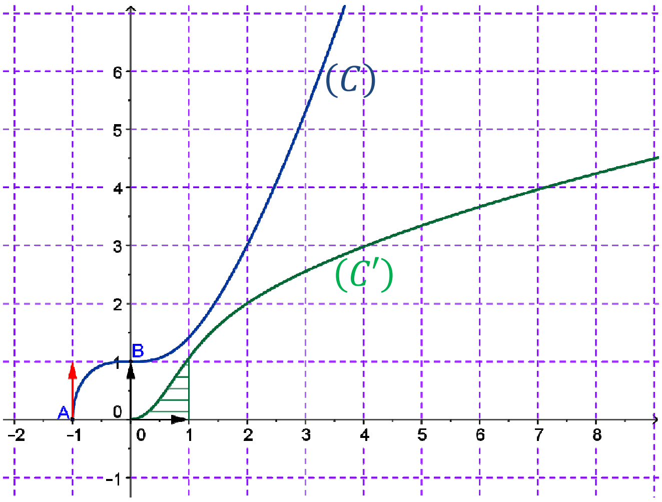
c) Montrer que $BB' = BC$

d) En déduire que $S(I) = J$.

3) Soit $S = f$ o $S_{(BC)}$. Déterminer la nature et les élèments caractéristiques de S.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $[-1\,,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^3+1}$. On représenté ci-dessous sa courbe (C) ainsi que la courbe (C') de la restriction de sa fonction dérivée f' sur $[0\,,+\infty[$ dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.



1) **a)** Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in\,]-1\,,+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.

2) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée.

3) **a)** Tracer le cercle de centre O et de rayon 1 dans le repère $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

b) En utilisant des considérations d'aires, montrer que :

$$\frac{\pi}{4} < \int_{-1}^{0} \sqrt{x^3+1}\; dx < 1$$

4) On muni l'espace d'un repère orthonormé $\left(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\,\right)$. Soit S le solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de (C) autour de l'axe $(O\,,\vec{\imath}\,)$, calculer le volume $\mathcal{V}$ de S

Exercice 4

A) Soit F la fonction définie *sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$

1) Montrer que F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $F'(x)$.

2) a) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$; on a : $F(x) = x$

b) Calculer la valeur de $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

B) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne la fonction f_n définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{\sin[2(n+1)x]}{\sin x} \quad si \;\; x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ f_n(0) = 2n+2 \end{cases} \qquad \text{On pose} \quad U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\, dx$$

1) **a)** Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie

b) Calculer U_0

2) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} - U_n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

3) **a**) Calculer pour $k \in \mathbb{N}$ $\int_0^1 x^{2k}\, dx$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n = 2\int_0^1 \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx$

4) **a**) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|U_n - 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right| \leq \frac{2}{2\text{n}+3}$

b) En déduire que (U_n) converge vers $\frac{\pi}{2}$

__On donne :__ $\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $\forall k \in \mathbb{Z}, \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$