Mathématiques

4ème Maths

09 Février 2010 Durée: 2 h

Exercice n°1 : (3pts)

Pour chaque question répondre par *Vrai* ou *Faux*, puis justifier votre réponse.

1) Si $\int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{1} g(t)dt$ alors $f(t) = g(t)$ pour tout $t \in [-1,1]$.
2) $\int_{-3}^{3} \frac{\sin t + t}{1+t^4} dt = 0$
3) La composée d'une homothétie de rapport négatif et d'un déplacement est une similitude indirecte.

Exercice n°2 : (7pts)

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives i, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}+i$. (Unité graphique :4cm) . Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[OB]$, $[AC]$ et $[BC]$. Soit S la similitude directe qui transforme A en I et O en B.

1)
   a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b) Déterminer l'écriture complexe de S.
   c) En déduire l'affixe du centre Ω de S. Construire Ω.
   d) Déterminer l'image du rectangle AOBC par S.
2) On considère la transformation du plan dans lui-même : $h = S \circ S$.
   a) Quelles sont les images des points O, B et A par h.
   b) Montrer que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
   c) En déduire que les droites (OC), (BJ) et (AK) sont concourantes.
3) Soit la transformation $f = S \circ S_{(OC)}$ où $S_{(OC)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OC).
   a) Montrer que f est une similitude indirecte de centre Ω.
   b) Déterminer $f(O)$ et caractériser f.

Exercice n°3 : (5pts)

Soit la fonction g définie par $g(x) = \int_{x}^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$.

1) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}_+$.
2) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée.

L.Bechri Imededdine ***Mr. BenAmmar***

3) Montrer que la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire que :

$$\frac{x}{\sqrt{1+8x^3}} \leq g(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^3}} \quad ; x \geq 0$$

4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Exercice n°4 : (5pts)

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt$.

1) Calculer I_0, I_1 et I_2.
2)
   a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
   b) En déduire I_3 et I_4.
   c) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 < I_{n+1} \leq I_n$.
   d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}}$.

Bon Travail

L.Bechri Imededdine

Mr. BenAmmar