Exercice 1

1) Démontrer les propositions suivantes :

a) $2^{340} \equiv 1 (mod\ 11)$

b) Pour tout entier naturel n ; 9 divise $7^{3n} - 1$.

c) Pour tout entier naturel n ; $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.

2) **a)** Donner suivant les valeurs de n les restes de la division euclidienne de 2^n par 7.

b) En déduire que si n est un multiple de 3 alors $2^{n+2} + 2^{n+1} + 1$ est divisible par 7.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0\,,1[$ par $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$.

1) **a)** Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Construire C_f et $C_{f^{-1}}$ courbe représentative de f^{-1} dans le même repère.

2) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\,dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\ dx$$

3) Soit F la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ par : $F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\ dt$

a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ et calculer $F'(x)$.

b) En déduire que $\forall x \in \left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$; $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$.

c) Calculer alors $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\ dx$; puis $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\,dx$

4) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 3

Dans le plan orienté, on considère un rectangle $ABCD$ de centre O tels que $AB = 2AD$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Soient $I = A * B$ et $J = D * C$. La perpendiculaire à (AC) passant par I coupe (DC) en E. Soit S la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

1) Déterminer le rapport et l'angle de S.

2) ***a)*** Déterminer $S\big((AC)\big)$ et $S\big((BC)\big)$.

b) En déduire $S(C)$.

c) Construire alors le point $F = S(D)$.

3) Soit Ω le centre de S.

a) Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{4}$ montrer que $S \text{ o } S = h$

b) Montrer que $S \text{ o } S(A) = O$. En déduire que $\Omega \in (AO)$.

c) Soit $G = I * E$. Montrer que $S \text{ o } S(I) = G$. En déduire que $\Omega \in (IG)$.

d) Construire Ω.

4) Soit σ la similitude indirecte d'axe Δ de centre Ω qui transforme I en A.

a) Déterminer le rapport de σ.

b) Construire l'axe Δ.

c) Soit le point K tel que $I = K * \Omega$. Montrer que Δ est la médiatrice du segment $[AK]$.