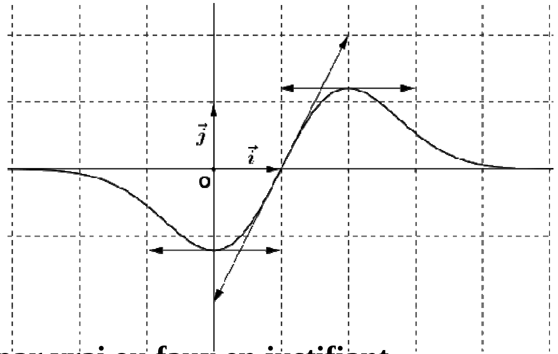
Lycée Pilote 15 octobre 1963 - Bizerte Prof: Mme Bayoudh	Devoir de contrôle n °2 Mathématiques	Classe :3ème Maths$_1$ février 2014 — Durée : 2 heures

Exercice 1 : (4points)

Dans le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



1) Répondre par vrai ou faux en justifiant.

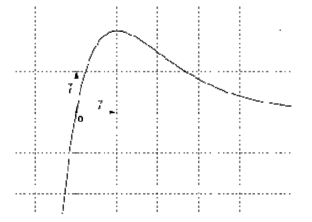
a/ $f'(0,5) < f'(3)$

b/ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h} = 2$

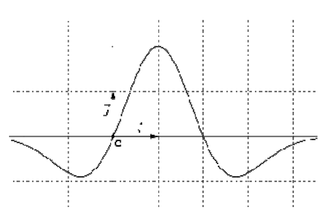
c/ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2} = f(2)$

d/ Soit F une fonction dérivable sur IR telle que $F' = f$.
F admet dans IR deux extrema locaux .

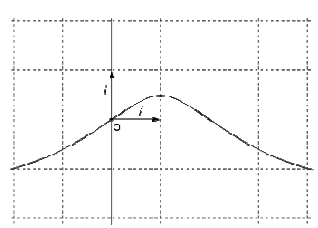
2) Une seule des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f', déterminer laquelle en justifiant.



C_1



C_2

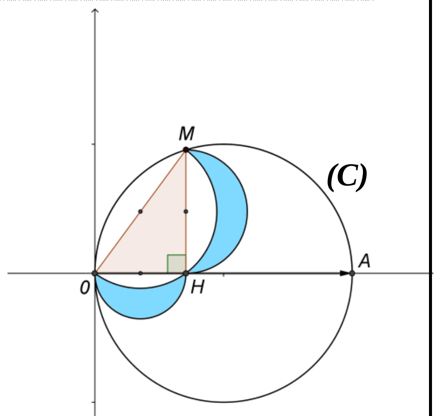


C_3

Exercice 2 : (4points)

Dans la figure ci-contre :

- ***(C) est un cercle de diamètre $[OA]$***
- ***M est point variable du cercle (C)***
- ***H est le projeté orthogonale de M sur$[OA]$***



- ***On a tracé trois demi-cercles de diamètres respectifs les trois côtés du triangle OMH pour obtenir deux lunules.***

On se propose de déterminer la position du point M sur le cercle (C) pour que la somme des aires des deux lunules soit maximale.

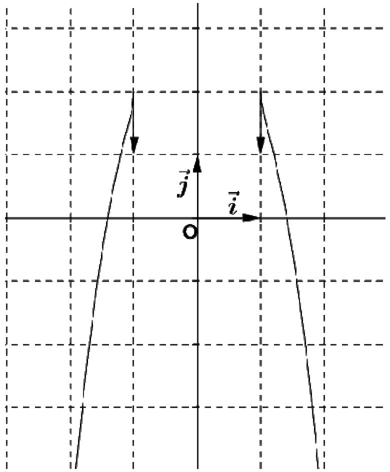
1) Montrer que la somme des aires des deux lunules est égale à l'aire du triangle rectangle *OMH*.

2) On munit le plan du repère orthonormé $R = (O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath}$
On désigne par (x,y) le couple de coordonnées de M dans R.
a/ Ecrire une équation cartésienne du cercle (C).
b/ Déduire que $MH = \sqrt{x-x^2}$
c / Déterminer alors l'aire du triangle *OMH*.

3) On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x-x^2}$
a/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en 1.
b/Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0,1[$
b/ Dresser le tableau de variation de f
c/ Déduire la position du point M pour laquelle la somme des aires des deux lunules est maximale. http://mathematiques.kooli.me/

Exercice 3 : (6points)

A) *La courbe ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la fonction g définie sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ par $g(x)=2-x^2\sqrt{x^2-1}$.*



1) **Calculer $g(\sqrt{2})$ et $g(-\sqrt{2})$**

2) **Par une lecture graphique :**

a/ Déterminer le domaine dérivabilité de g.

b/ Déterminer $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{g(x)-2}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{g(x)-2}{x+1}$

c/ Déterminer le signe de $g(x)$ pour $x\in\,]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

B) **Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ par :**

$$f(x)=\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x}-x+1\,.$$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) **a/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et à gauche en (-1)**
Interpréter les résultats.
b/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.
c/ Montrer que la droite $\Delta: y=-x+3$ est une asymptote à Cf au voisinage de $(+\infty)$ et que la droite $\Delta': y=-x-1$ est une asymptote à Cf au voisinage de $(-\infty)$.

2) **a/ Montrer que pour tout $x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$**
b/ Dresser le tableau de variation de f .

Exercice 4 : (6points)

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle équilatéral direct ABC. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des côtés $[AB],[BC]$ et $[AC]$.

1) **a/ Montrer qu'il existe une unique rotation R qui transforme I en C et B en J .**
b/ Préciser l'angle de R et construire le centre Ω de R.
c/ Montrer que Ω, B, C et I sont situés sur un même cercle .
d/ Soit E le symétrique de I par rapport à B .
Montrer que $R(E)=B$

2) **Soit R' la rotation d'angle $\alpha\in\,]-\pi,0[$ telle que $R'oR'(K)=B$ et $R'oR'(A)=J$**
a/ Déterminer le centre et l'angle de la rotation R'.
b / Construire $\Omega'=R'(\Omega)$ et montrer que $(\Omega\Omega')$ est tangente à Γ.

3) **Soit M un point variable du plan. On désigne par :**
$M_1=R(M)$ et $M_2=R'(M)$
a/ Montrer que si M est distinct de I et de Ω alors :
$$\left(\widehat{\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MI}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{MM_1},\overrightarrow{MM_2}}\right)[2\pi]$$
b/ En déduire le lieu géométrique du point M lorsque les points M, M_1 et M_2 sont alignés.