

Exercice N° 01(4.5points)

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

- 1) La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1}{n+1} + (-1)^n$ est convergente
- 2) Le nombre complexe $a = (\sqrt{3} + i)^{2010}$ est imaginaire pur
- 3) $\frac{13\pi}{12}$ est un argument du nombre complexe $z = -\frac{\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$
- 4) Soit θ un réel. L'ensemble des points M d'affixe $z = 1 - 3i + e^{2i\theta}$ est le cercle de centre le point $J(-1+3i)$ et de rayon 1
- 5) Pour tout nombre complexe z , si $|1 + iz| = |1 - iz|$, alors la partie imaginaire de z est nulle
- 6) Dans le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) on considère les points A et B d'affixes respectives non nulles z_A et z_B telle que $z_B = iz_A$.
Le triangle OAB est alors rectangle isocèle en O

Exercice N° 02(5points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{x} \cos x}{x + 2} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{4(\sqrt{x^2 + 1} - 1)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue en 0
- 2) a/ Montrer que pour tout réel positif x on a : $\frac{1 - \sqrt{x}}{x + 2} \leq f(x) \leq \frac{1 + \sqrt{x}}{x + 2}$
b/ En déduire la limite de $f(x)$ en $+\infty$
- 3) Déterminer, en justifiant la réponse, les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(1 - \sin x)$
- 4) a/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ une solution qu'on notera α
b/ Montrer que $\tan(\alpha) = -\sqrt{\alpha - 1}$

Exercice N° 03(5points)

1-a/ Vérifier que : $(1 + \sqrt{3} + 2i)^2 = 2\sqrt{3} + 4i(1 + \sqrt{3})$

b/ Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - (3 + \sqrt{3})z + (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - i) = 0$ et mettre les solutions sous forme algébrique

2-Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (unité graphique 2cm) on considère les points A, B et Ω d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$ et $z_\Omega = 2$

Soit ζ le cercle de centre Ω et de rayon 2

a/ Vérifier que $B \in \zeta$

b/ Placer les points A et Ω . Construire alors le point B

3-a/ Ecrire z_A sous forme exponentielle

b/ Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique

c/ Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

d/ En déduire la forme exponentielle de z_B

e/ Déterminer alors la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{12})$

Exercice N° 04(4.5points)

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = 3$, $b_0 = 1$ et pour tout entier naturel

n on a : $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n + 3}{3}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n + 3}{3}$. On pose $u_n = a_n - b_n$

1) a/ Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 2(\frac{1}{3})^n$

b/ En déduire la limite de (u_n)

2) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{a_n + b_n}{n}$

a/ Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $v_n \geq 2$

b/ Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $v_{n+1} = v_n + \frac{2 - v_n}{n+1}$.

c/ En déduire que (v_n) converge vers un réel $l > 0$

2) Exprimer alors a_n et b_n en fonction de u_n , v_n et n puis déterminer les limites des suites (a_n) et (b_n) .

Bon courage

<http://mathematiques.kooli.me/>