LYCEE KRAM ■■■ **DEVOIR DE CONTROLE N°1** 11/2021	**Epreuve :** *Mathématiques*
	Section : 4ème *Sciences Expérimentales*
	Durée : 2 *heures* — **Coefficient :** 3
	Professeur : Wissem Fligène

Exercice 1 : (6 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$, $z_C = -2i$ et $z_D = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

1) a) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent au même cercle de centre O et de rayon 2.
   b) Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes z_B, z_C et z_D.
   c) Construire alors les points A, B, C et D.
2) Soit $w = z_D \times \overline{z_B}$.
   a) Déterminer le module et un argument de w.
   b) Ecrire w sous forme cartésienne.
   c) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
3) Soit le point E d'affixe $z_E = z_B + z_D$.
   a) Montrer que $OBED$ est un losange.
   b) En déduire un argument de z_E.

Exercice 2 : (7 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct$(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_C = \overline{z_A}$.

1) Donner la forme algébrique de z_A, z_B et z_C.
2) Montrer que C est un point du cercle ζ de diamètre $[AB]$.
3) A tout point M d'affixe z distinct de chacun des points A et B on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z+1-i\sqrt{3}}{z+i\sqrt{3}}$
   a) Montrer que si M' appartient à l'axe $(O,\vec{v})$ alors M appartient au cercle $\zeta\setminus\{A,B\}$.
   b) Montrer que si $|z'| = 1$ alors M est un point de la médiatrice Δ du segment $[AB]$.
4) Soit D le point d'affixe $z_D = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}i$ et D' le point d'affixe $z_{D'} = \frac{z_D + 1 - i\sqrt{3}}{z_D + i\sqrt{3}}$
   a) Montrer que $z_{D'} = -i$.
   b) Déduire l'affixe de chacun des deux points d'intersection de la droite Δ et du cercle ζ

Exercice 3 : (7 pts)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \begin{cases} -x - 2 + \sqrt{x^2 - 1} & si\ x \in \left]-\infty, -1\right] \\ x^3 + 3x + 3 & si\ x \in \left]-1, 0\right[\\ 2\left(\dfrac{1-\cos x}{x}\right) + 3 & si\ x \in \left]0, +\infty\right[\end{cases}$

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $3 \leq f(x) \leq 3 + \dfrac{4}{x}$.

   b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) a) Montrer que f est continue en (-1).

   b) f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

4) a) Montrer que f est strictement croissante sur $\left]-1, 0\right[$.

   b) Déterminer l'image de $\left]-1, 0\right[$ par f.

   c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\left]-1, 0\right[$ une solution unique α.

   d) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

5) Soit la fonction g définie sur $\left]0, +\infty\right[$ par $g(x) = 2x\left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) + 3$.

   a) Montrer que $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.