Lycée Pilote 15 octobre 1963 - Bizerte	Classe : $4^{\text{ème}}$ Sciences experimentales$_1$
Prof: Mme Bayoudh	Durée : 2 heures
Devoir de contrôle n °1 en mathématiques	Date : 28/10/2014

- **<u>Exercice 1 :</u> (3points)**

Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes, en justifiant la réponse.

		Vrai	**Faux**
1)	$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-3x}{\sqrt{x^2+1}} = -3$		
2)	L'ensemble des points M d'affixe z telle que $\lvert z-i\rvert = \lvert z+2i\rvert$ est une droite parallèle à l'axe des réelles.		
3)	Soit z un nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{2}$ alors $\lvert i+z\rvert = 1+\lvert z\rvert$		

- **<u>Exercice 2 :</u>(6 points)**

Soit f la fonction définie sur IR par : $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{\frac{3x+sinx}{x-1}} & \boldsymbol{si\ x \leq 0} \\ \boldsymbol{x\ sin\frac{\pi}{2x}} & \boldsymbol{si\ x} > 0 \end{cases}$

1) a/ Montrer que f est continue en 0

   b/ Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

2) a/ Montrer que pour tout $x \leq 0$, $\lvert f(x) - 3\rvert \leq \frac{4}{1-x}$.

   b/ Déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet au moins une solution dans $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$.

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{g(x) = \sqrt{x^2+3} - x - 1}$

   a/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} fog(x)$

   b/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

   c/ Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Déduire $g(\mathbb{R})$.

- **<u>Exercice 3 :</u>(5 points)**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.**Soit $\boldsymbol{\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[}$.**

1) a/ Vérifier que $1 + 2isin(2\theta)e^{2i\theta} = e^{4i\theta}$.

   b/ Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $2z^2 - 2z - isin(2\theta)e^{2i\theta} = 0$

   c/ Ecrire les solutions sous formes exponentielles.

2) On donne les points $E(-isin\theta . e^{i\theta})$ et $F(cos\theta . e^{i\theta})$.

   a/ Calculer EF.

   b/ En déduire que $[EF]$ est un diamètre d'un cercle fixe que l'on précisera.

3) A tout point M d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $\boldsymbol{z'}$ tel que $z' = 1 - \frac{1}{\bar{z}}$

   a/ Montrer que l'affixe du point F' est $z_{F'} = -itan\theta$

   b/ En déduire l'ensemble des points F' lorsque θ varie dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 4 :(6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit f l'application du plan **P** privé du point O dans ***P*** qui, à tout point M du plan d'affixe $z \neq 0$, associe le point M' d'affixe $\boldsymbol{z'}$ définie par : $\boldsymbol{z' = z + i - \frac{1}{z}}$

On considère les points A , B et C d'affixes respectives : $a = i$, $b = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $c = -i$

On désigne par A' et B' les images respectives de A et B par f , d'affixes respectives a' et b'.

1) a/ Montrer que le point C est l'unique point invariant par f

   b/ Calculer a' et b'.

   c/ Montrer que $\frac{-b}{b'-b} = \frac{\sqrt{3}}{3}i$. En déduire la nature du triangle OBB'.

2) Soit (E) l'ensemble des points du plan **P** privé du point O qui ont pour image par f le point O.

   a/ Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + iz - 1 = 0$

   b/ Déduire que les points de (E) appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 1.

3) Soit θ un réel.

   a/ Montrer que si $z = e^{i\theta}$ alors $z' = (2sin\theta + 1)i$

   b/ En déduire que si M appartient au cercle Γ alors M' appartient au segment $[A'C]$

Bon travail et bonne chance