$4^{ème}$ Maths 2 ❄ **Devoir de contrôle 1** ❄ **Durée : 2 h** ❄

Prof : ✍ Habib Haj Salem ✍

Croyez en vos rêves et ils se réaliseront peut-être. Croyez en vous et ils se réaliseront sûrement. **Martin Luther King**

Exercice 1 (8 points)

- La droite $D : y = 1$ est une asymptote à C au voisinage de $-\infty$.
- La droite $\Delta : y = -x + 1$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$.
- Pour tout réel $x < 1, f(x) > 1. f(2) = \dfrac{-1}{2}$

1. En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes.
   - a) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + x$ et $f(]-2, +\infty[)$
   - b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{f(x) - 1}$, $\lim\limits_{x \to 0} f\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} (\sqrt{x}) f\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$
   - c) Dresser le tableau de variation de f.
2.
   - a) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet dans f une solution unique α et que $\alpha \in]1, 2[$
   - b) Placer sur l'axe $(O, \vec{i})$ les points A et B d'abscisses respectives a et b antécédents de α par f. $(f(a) = f(b) = \alpha)$.

     Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (\ f o f\ )(x)$ On note par Γ la courbe représentative de g dans $\left(O, \ \overrightarrow{i}\ , \ \overrightarrow{j}\ \right)$.
3.
   - a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$
   - b) Recopier et completer le tableau suivant :

x	1	a	b	0	α
$g(x)$					

   - c) Déterminer $g(\mathbb{R})$ et montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
4. On donne ci-dessous son tableau de variation de g incomplet :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	.	↘	.	↗	.	↘	.

   - a) Recopier et compléter le tableau de variation de g.
   - b) Préciser les asymptotes à la courbe Γ de g et tracer une allure de Γ.

Exercice 2 (6 points)

Soit m un nombre complexe non nul.

I- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z, $(E) : z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) (On remarque que m est une solution de l'équation (E)).
2. On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'equation (E) autre que m
   - a. Vérifier que : $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{m}$
   - b. Dans le cas où $m = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$, écrire sous la forme algébrique z_1 et z_2

II- Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = me^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = me^{-i\frac{\pi}{3}}$.

On note P le centre de la rotation d'angle $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ qui transforme O en A, Q le centre de la rotation d'angle $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ qui transforme A en B et R le centre de la rotation d'angle $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ qui transforme B en O.

1. Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés.
2. - a. Montrer que l'affixe de P est $p = m\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i7\frac{\pi}{12}}$ et que l'affixe de R est $r = m\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i7\frac{\pi}{12}}$
   - b. Montrer que l'affixe de Q est $q = m\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$
3. Montrer que $OQ = PR$ et que les deux droites (OQ) et (PR) sont perpendiculaires.

Exercice 3 (6 points)

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ U_{n+1} = U_n - U_n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. - a. Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
   - b. Démontrer que si la suite (U_n) converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$
2. On suppose dans cette question que $U_0 = \dfrac{1}{2}$.
   - a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 1$.
   - b. En déduire que (U_n) est convergente.
   - c. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,$T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k^2$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.
3. On suppose dans cette question que : $U_0 = 2$
   - a. Vérifier que $U_1 < 0$.
   - b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, U_n \leqslant U_1$.
   - c. En déduire que la suite (U_n) n'est pas minorée, et déterminer sa limite.
   - d. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{1-U_k}$.

     Vérifier que pour tout $\in \mathbb{N}^*$,$\dfrac{1}{1-U_k} = \dfrac{1}{U_{k+1}} - \dfrac{1}{U_k}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

BON TRAVAIL

ANNEXE A RENDRE

Nom et prénom :..
Classe et Numéro..............