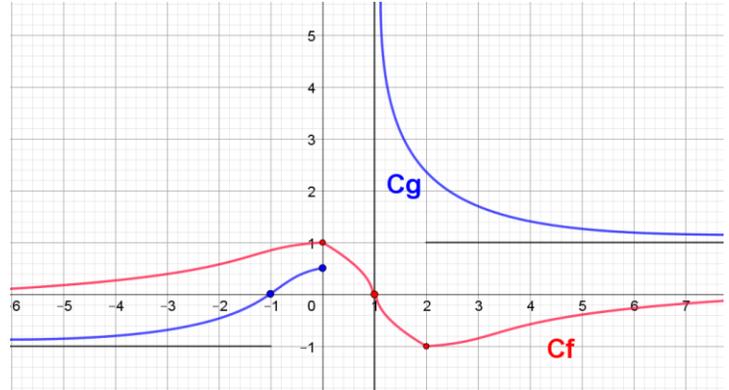




Exercice N°1 (6points)

Dans la figure ci-contre on a tracé les courbes représentatives de deux fonctions f et g dans un repère orthonormé telles que :

- f est définie sur \mathbb{R} et g est définie sur $]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$
- Les droites d'équations respectives : $y = -1$ et $y = 1$ sont des asymptotes à la courbe de g .
- La courbe de g passe par le point $(0, \frac{1}{2})$.
- L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.



1/ Par lecture graphique :

- Déterminer l'image de $]-\infty, 1[$ par f .
- Déterminer, en justifiant, le domaine de définition de $g \circ f$.

2/ a) Montrer que $g \circ f$ est continue sur $]1, 2[$

- Montrer que $g \circ f$ est strictement décroissante sur $]1, 2[$

3/ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- Montrer que l'équation : $g \circ f(x) = \frac{1}{2n}$ admet, dans $]1, 2[$ une solution unique a_n .
- Déterminer la monotonie de la suite (a_n) .
- En déduire que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice N°2 (7 points)

On considère la suite U définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \end{cases}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$

1/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

2/ Soit W la suite définie sur \mathbb{N}^* par $W_n = U_n^2 - U_{n+1} \cdot U_{n-1}$

- Montrer que W est une suite géométrique de raison (-1)
- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n^2 - U_{n+1} \cdot U_{n-1} = (-1)^n$

3/ On considère la suite V de terme général $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_{n+1} - V_n) = 0$

b/ Etablir l'égalité : $V_{n+1} - V_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{U_{n+1} \cdot U_{n-1}}$, et en déduire la monotonie de la suite (V_{2n}) et celle de la suite (V_{2n+1}) .

c/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{2n} \leq V_{2n+1}$

d/ En déduire que les suites (V_{2n}) et (V_{2n+1}) sont convergentes et quelles convergent vers la même limite.

e/ En déduire que la suite (V_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice N°3 (7 points)

NB : Les parties A/ et B/ de cet exercice sont indépendantes !

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) ,

A/ a) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $(E_\theta) : z^2 + i(e^{i\theta} - 2)z + e^{i\theta} - 1 = 0 ; \theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$

b) Donner les solutions de (E_θ) sous forme trigonométrique.

c) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe $(z = i - i e^{i\theta})$ lorsque θ varie dans l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \pi[$

B/ On considère les points : M_1, M_2, M et M' d'affixes respectives $z_1 = re^{i\theta}, z_2 = r e^{-i\theta}, z = \frac{z_1^2}{z_2}$ et $z' = z_2 + \frac{z_1^2}{z_2}$

où $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et r est un réel strictement positif.

1) a) Montrer que les points M_1, M_2 et M sont deux à deux distincts.

b) Montrer que les points M, M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle de centre O et que $M_1 M_2 = M_1 M$.

c) Exprimer $(\overline{M_1 M_2}, \overline{M_1 M})$ en fonction de θ

En déduire l'ensemble des points M pour que le triangle $MM_1 M_2$ soit équilatéral.

2) a) Montrer que les points O, M_1 et M' sont alignés.

b) Montrer alors que le milieu I de $[OM']$ est le projeté orthogonal de M_2 sur (OM_1) .