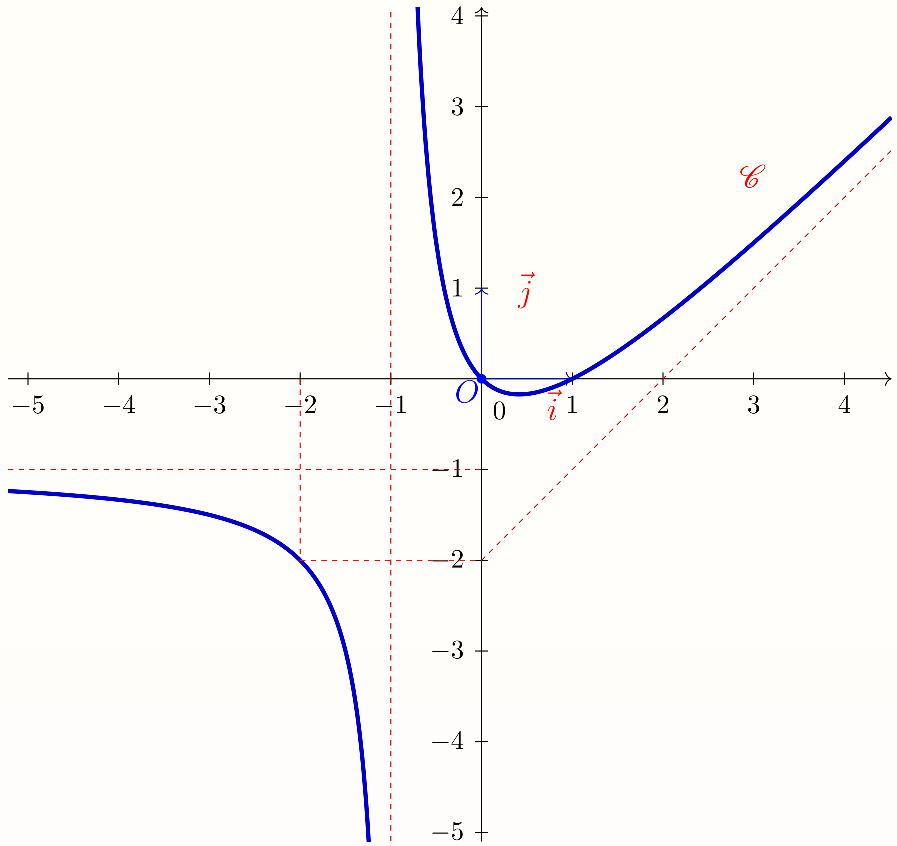
LYCÉE DE TABARKA	Devoir de contrôle N°1	
Prof : MERSANI IMED	Épreuve : Mathématiques	Section : Mathématiques
	Durée : 2H	Date : 10-11-2022

Exercice 1 : (6 pts)

La figure ci-dessous désigne la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et continue sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$.

- Les droites d'équations respectives $x=-1$, $y=-1$ et $y=x-2$ sont des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.
- On donne $f(-2)=-2$.



1 Par une lecture graphique :

ⓐ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)-x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)-x+2}$.

ⓑ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos(f(x))-f(x)$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(f(x))}{f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+f(x)}{1+xf(x)}$.

ⓒ Soit k un entier naturel non nul. Déterminer, en justifiant, l'image de l'intervalle $]-\infty,-1[$ par $\varphi_k=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k\text{ fois}}$.

2 ⓐ Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation $f(x)=n$ admet dans $]-1,0]$ une unique solution a_n.

b) Étudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} f\circ f(x) & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{2\cos(\pi x)}{|x|+1} & \text{si } x \geqslant -1 \end{cases}$. On désigne par Γ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

a) Étudier la continuité de g en -1.

b) Vérifier que : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ -\dfrac{2}{|x|+1} \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{2}{|x|+1}$.
Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4 a) Sachant que pour tout $x \in]-\infty,-1[$, $f(x) = \dfrac{ax}{x+b}$, où a et b sont deux réels.
Vérifier que : $a=-1$ et $b=1$.

b) Déterminer alors l'expression de $g(x)$, pour tout $x \in]-\infty,-1[$.

5 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que : $\mathrm{Re}(z) < -1$ et $z^2 + (z-\overline{z}) + i\,(z+\overline{z}) \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : (7 pts)

1 Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 3$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n^2 - 2U_n + 4}{U_n}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n > 2$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déteminer sa limite.

2 a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1} - 2 \leqslant \dfrac{1}{3}(U_n - 2)$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n - 2 \leqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3 a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $3^n \geqslant n^2$.

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $V_n = \dfrac{1}{n(U_n-2)}$.
Montrer que pour tout entier $n\geqslant 2$, $V_n \geqslant n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

4 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sqrt{2} + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k(U_k-2)$.

a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|S_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2n}\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$.

b) Montrer que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 : (7 pts)

I- Pour tout nombre complexe m, on considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E_m) : z^2 - (2m-1)z + 2m^2 - (1+i)m = 0$$

1 Calculer le discriminant Δ de (E_m) et vérifier que : $\Delta = (2im+1)^2$.

2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

II- Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Pour tout nombre complexe m, on donne les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectives :

$$z_A = \frac{-1+i}{2},\ z_B = \frac{1+i}{2},\ z_M = m,\ z_1 = (1-i)m - 1 \text{ et } z_2 = (1+i)m.$$

1 a) Montrer que si $m \neq \frac{1}{2}i$ alors $\dfrac{z_2 - z_A}{z_1 - z_A} = i$.

b) En déduire que si $m \neq \frac{1}{2}i$ alors le triangle AM_1M_2 est rectangle isocèle et de sens direct.

2 a) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$ et Γ le cercle de centre B et de rayon 2.
Montrer que : M_1 appartient à $\mathscr{C}$, si et seulement si, M appartient à Γ.

b) Soit $m \neq \dfrac{1+i}{2}$. Vérifier que $z_1 = (1-i)(m - z_B)$ et en déduire que $(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{OM_1}}) \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

c) Dans la page annexe, on a placé un point M du cercle Γ. Construire les points M_1 et M_2.

3 On pose $m = \frac{1}{2}e^{i\theta}$, où θ est un réel de l'intervalle $\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Vérifier que : $e^{i\theta} - i = 2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$.

b) Vérifier que : $z_1 - z_A = \left(\dfrac{1-i}{2}\right)\left(e^{i\theta} - i\right)$. En déduire la forme exponentielle de $z_1 - z_A$.

c) Déterminer la valeur de θ pour laquelle l'aire $\mathcal{A}(\theta)$ du triangle AM_1M_2 soit maximale.

Feuille à rendre avec la copie

Nom et prénom :..

Exercice 3 :