Lycée ECHEBBI K.Kebira	Devoir de contrôle de Math n°1	Date : Novembre 2022
P : Guedda Omar	3éme Maths	Durée : 2h

Le plan est oriente dans le sens direct et muni d'un repere orthonorme direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

EXERCICE 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$par $f(x) = 4x^3 + 2x - 2$

1) a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans$]0,1[$ et verivier que $2\alpha^3 = 1 - \alpha$

c) Dans la **figure-1-**ci-jointe on a tracé la courbe de la fonction $u(x) = 2x^3$ sur $[0, +\infty[$

Placer sur l'axe des abscisses le reel α

2) a) Tracer sur la **figure-1-$\mathcal{C}_g$**la courbe representative de $g(x) = x^2$et placer les points $A(1,0)$ et $B(\alpha, \alpha^2)$

b) Soit M un point variable de $\mathcal{C}_g$d'abscisse $x > 0$.

Determiner graphiquement les variations de la distance AM

3) a) On pose $h(x) = AM^2$. Montrer que $h(x) = x^4 + (x-1)^2$

b) Montrer que pour tout reels a et b on a : l'équation $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = (a+b)(a^2+b^2+1) - 2$

c) Etudier les variations de la fonction h sur$[0, \alpha]$ et $[\alpha, +\infty[$

4) Montrer que la valeur minimale de la distance AM est $m = \alpha^2\sqrt{1+4\alpha^2}$

EXERCICE 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ et les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{1}$ et $\vec{v}\binom{1}{-1}$ tel que $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv \theta[2\pi]$

1) a) En exprimant $\vec{u}.\vec{v}$ de deux manieres differentes,montrer que $\cos\theta = \frac{x-1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}$

b) En deduire que $-\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ est-il le maximum de f ? Justifier

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ E\left(\frac{x}{2}\right) & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ f(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Montrer que g est continue sur $]-\infty; -2[$ et $[0; +\infty[$

3) Dans la **figure-2-**ci-jointe on a tracé la courbe representative de la fonction f

Repondre aux questions suivantes en se basant sur le graphique

a) Tracer Γ la courbe representative de la fonction g

b) Comparer $g\left(\frac{2022}{n^2}\right)$ et $g\left(\frac{2023}{n}\right)$; $n \in \mathbb{N}^*$

c) Déterminer D_c le domaine de continuité de la fonction g

d) Déterminer l'image par g de chacun des intervalles $\mathbb{R}$ et $[-1; 1]$

EXERCICE 3 :

On donne dans la **figure-3-**ci-jointe : $ABCD$ est un carré de centre O et de coté $a > 0$.

BECest un triangle equilateral direct et le point F defini par $\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CE} = \vec{O}$

1) a) Calculer $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EF}$,$\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BF}$ et BF

b) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}})[2\pi]$ et que $AF^2 = (4 - \sqrt{3})a^2$

c) Determiner $(\widehat{\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CA}})$ et montrer que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2) Soit l'ensemble $\mathcal{C} = \{M \in P; MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 6a^2\}$.

Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{C}$

3) Soit l'ensemble $\Delta = \{M \in P; MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 3a^2\}$ et I le milieu de $[AB]$

a) Montrer que pour tout point M du plan on a : $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 3a^2 + 2\overrightarrow{MC}.(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$

b) Montrer que l'ensemble Δ est une droite que l'on determinera

c) Montrer que Δ et $\mathcal{C}$ sont secants

4) Soit K un point de l'intersection de Δ et $\mathcal{C}$ et G le barycentre de $(C, 3)$ et $(D, 1)$

a) Montrer que $3KC^2 + KD^2 = 3a^2$

b) Montrer que le triangle GKD est isocele en G

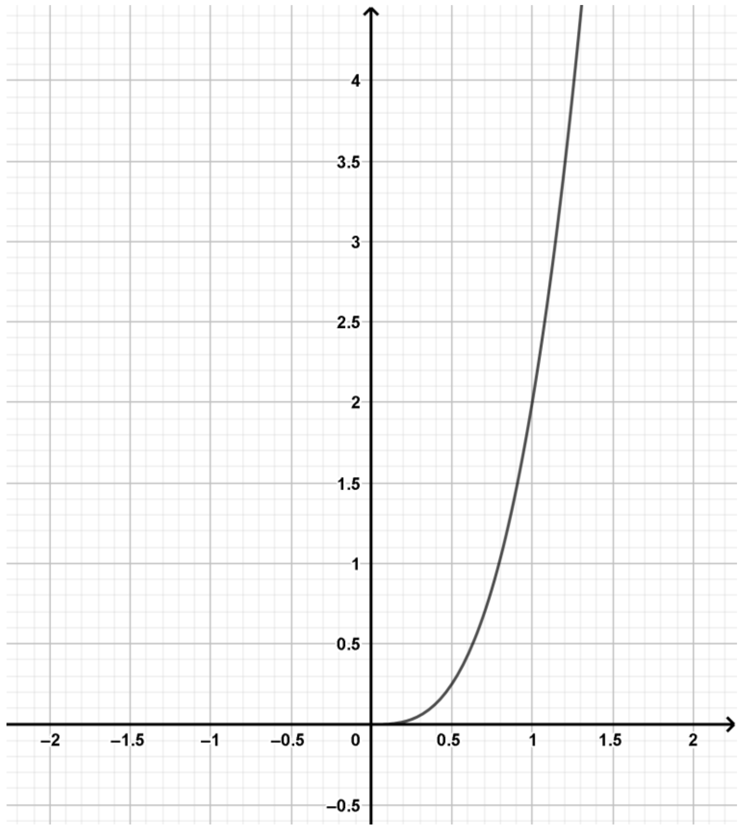
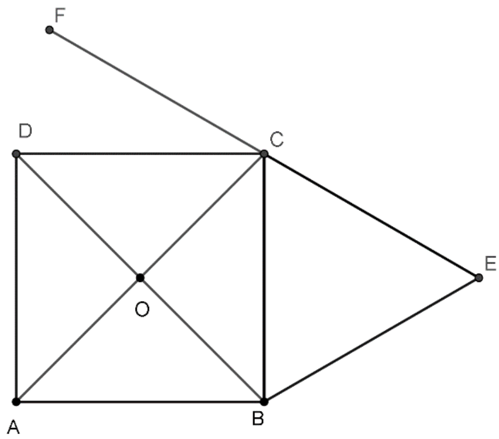
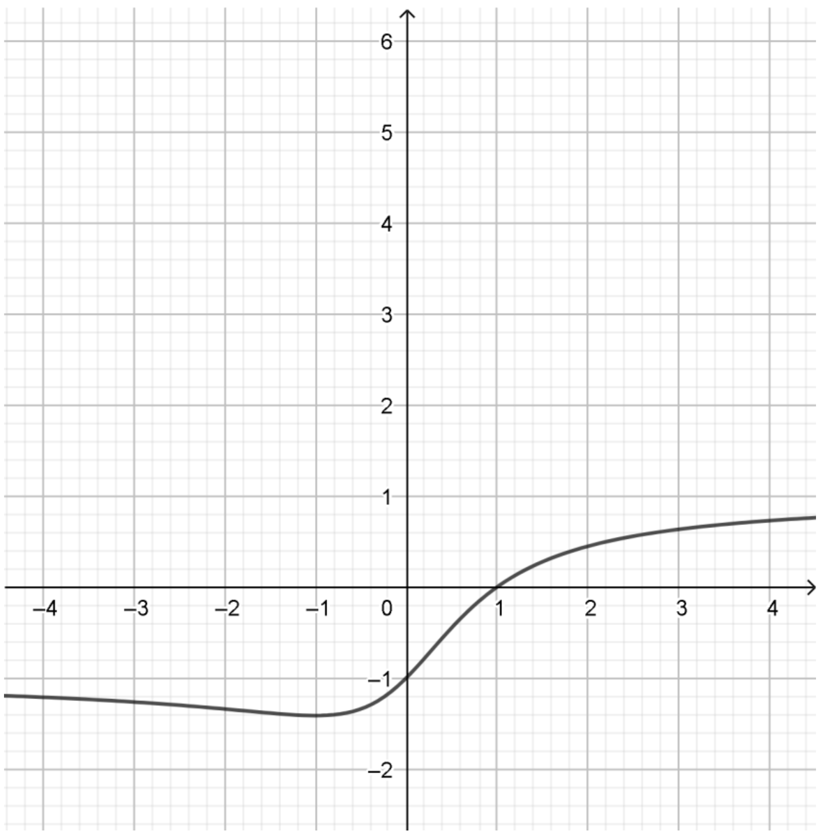

4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
2

Figure3


F
D
C
E
O
A
B


6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4