

Lycées Tahar Sfar et Ibn Sina Mahdia	<i>Devoir de contrôle n° 2</i> Mathématiques	Classe : 4 ^{ème} Sc exp
Date : 05 /02 / 2010	Profs : M ^{me} Turki et M ^{rs} Baccar, Hamza et Meddeb	Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (6 pts)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \in]0, 1[\\ \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a/ Vérifier que f est continue en 1.
b/ Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 2) a/ Etudier les variations de f .
b/ Montrer que la droite $D : y = x$ est une asymptote à $\mathcal{C}$.
c/ Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D sur $[1, +\infty[$.
d/ Tracer D et $\mathcal{C}$.
- 3) a/ Montrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
b/ On note f^{-1} la fonction réciproque de f .
Montrer que f^{-1} est dérivable en 0.
c/ On désigne par $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Tracer $\mathcal{C}'$.

d/ Montrer que, pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Exercice n°2 : (4 pts)

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} x$.

- 1) Dresser le tableau de variations de f .
- 2) a/ Montrer que f est une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, \frac{1}{2}]$.
b/ On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f .
Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$.
c/ Calculer $f^{-1}(\frac{1}{4})$ et $(f^{-1})'(\frac{1}{4})$.

d/ Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $(f^{-1})'(x) = \frac{-4}{\pi\sqrt{1-4x^2}}$.

Exercice n°3 : (4 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(3, 0, 0)$, $B(0, 1, 1)$, $C(-1, 1, 2)$ et $D(3, 1, 1)$.

- 1) a/ Calculer les composantes du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
b/ Dédire l'aire du triangle ABC .
c/ Montrer que les points A , B , C et D sont non coplanaires.
- 2) a/ On note V le volume du tétraèdre $ABCD$. Montrer que : $V = \frac{1}{2}$.
b/ Soit H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) . Calculer DH .
- 3) a/ Calculer la distance du point D à la droite (AC) .
b/ On note H' le projeté orthogonal de D sur la droite (AC) , montrer que le triangle DHH' est rectangle et en déduire HH' .

Exercice n°4 : (6 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ et $C(-3, 3, -3)$.

- 1) a/ Montrer que les points A , B et C déterminent un plan P .
b/ Montrer qu'une équation cartésienne de P est : $x - y - z + 3 = 0$.
c/ Soit le point $H(-2, 2, -1)$, montrer que H est le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC .
- 2) Soit l'ensemble S d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 8z - 15 = 0$.
a/ Montrer que S est une sphère dont-on précisera le centre I et la rayon R .
b/ Vérifier que A , B et C appartiennent à S .
c/ Vérifier que (IH) est l'axe de $\mathcal{C}$.
d/ Déterminer l'intersection de S et P .
- 3) Soit le point $D(1, 0, 0)$.
a/ Vérifier que D est à l'intérieur de S , et que les points A , B , C et D sont non coplanaires.
b/ Soit Q le plan d'équation : $x + 1 = 0$.
Montrer que Q est le plan médiateur du segment $[AD]$.
c/ Déterminer le centre Ω et le rayon R' de la sphère S' circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

Bonne chance