| | | |
|---|---|---|
| **2010/2011** | **DEVOIR DE CONTRÔLE N ° 1** | **ELOUERFELLI . A.** |
| **L .IBN HAZEM** | **4 SC – EXP** | **DURÉE : 2 H** |

**EXERCICE N° 1 ( 3 PTS )** : **Répondre par : vrai ou faux ( aucune justification n'est demandée )**

**Le plan est rapporté à un repère orthonormé** $(o \quad \vec{u} \quad \vec{v})$

**a . Le nombre complexe** $\left(1+\ e^{i\,\theta}\right)\left(1+\ e^{-i\theta}\right)$ **est réel**

**b . Les points A** $\left(e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)$ **, B** $\left(e^{i\frac{\pi}{7}}\right)$ **et C** $\left(e^{-i\frac{\pi}{9}}\right)$ **sont situes sur le cercle de centre O et de rayon 1**

**c . Soit a un réel non nul ; les points A (a ) , B (** $\frac{3}{5}$ **a ) et C (** $\frac{8}{a}$ **) sont alignés**

**d . Si z est solution de l'équation :** $z^2 - 4\,z\ +\ 2010\ =\ 0$ **alors** $\bar{z}$ **est aussi solution de cette équation**

**EXERCICE N ° 2 (6 PTS )** : **On** considère **la fonction** $f$ **dont la représentation graphique notée C** $f$ **est donnée en annexe page 3 et la droite** $D$ **d'équation** $y\ =\ x$

**On désigne par (** $u_n$ **) la suite définie sur I**$N$ **par :** $u_0$ **= 6 et** $u_{n+1}$ **=** $f$ **(** $u_n$ **)**

**1 . a. Déterminer graphiquement les abscisses** $\alpha$ **et** $\beta$ **(**$\alpha\ < \beta$ **) des points d'intersection de la courbe C** $f$ **et de la droite** $D$

**b . Placer sur l'axe des abscisse les termes** $u_0$ **,** $u_1$ **et** $u_2$

**2 . a . Montrer que pour tout entier naturel n ,** $u_n\ > 2$

**b . Montrer que la suite (** $u_n$ **) est décroissante**

**c . En déduire que la suite (** $u_n$ **) est convergente et trouver sa limite l**

**On donne la fonction f définie sur** $]-\ 3\ ;\ +\infty[$ **par f ( x ) =** $\frac{4\,x+2}{x+3}$ **et on suppose que sa représentation est celle donnée en annexe page 3**

**3 . Soit (** $v_n$ **) la suite définie sur IN par :** $v_n$ **=** $\frac{u_n\ - 2}{u_n + 1}$

**a . Montrer que (** $v_n$ **) est une suite géométrique de raison** $\frac{2}{5}$

**b . Exprimer** $v_n$ **puis** $u_n$ **en fonction de n**

**c . Retrouver la limite de la suite (** $u_n$ **)**

**EXERCICE N °3 (6 PTS )** : **Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé** $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ **(unité graphique 2cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives**

$z_A = 2$ **,** $z_B = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ **et** $z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

1. Placer les points A, B et C , justifier brièvement la construction

2. a . Ecrire $z_B$ et $z_C$ sous forme algébrique.

   b . Montrer que OBAC est un losange.

3. Déterminer et construire l'ensemble $(\Delta)$ des points M d'affixe z tels que $|z| = |z-2|$

4. A tout point M d'affixe $z$ tel que $z \neq z_A$ on associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \frac{-4}{z-2}$

   a . Déterminer et construire l'ensemble (D) des points M tel que z' soit réelle

.  b . Montrer que $z' - 2 = \frac{-2z}{z-2}$

   c- Montrer que si M appartient à $(\Delta)$ alors M' appartient à un cercle que l'on précisera.

<u>EXERCICE N ° 4 ( 5 PTS)</u> : Soit la fonction $f$ définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 3x + 1; & si\ x \leq 0 \\ f(x) = \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} & ;si\ x > 0 \end{cases}$$

1 . Montrer que pour tout $x > 0$ ; $f(x) = \frac{-x}{1+\sqrt{1+x^2}}$

2 . a . Etudier la continuité de $f$ en 0

b . En déduire le domaine de continuité de $f$

3 . Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha \in ]-1;0[$

4 . a . Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a $-1 < f(x) < \frac{-x}{2+x}$

b . En déduire $\lim_{+\infty} f$