Devoir de contrôle n 3

Exercice 1 (6.5 pints)

Un technicien dispose d'une boîte contenant 10 batteries pour un appareil spécifique. Parmi ces 10 batteries, 4 sont déchargées et indiscernables extérieurement des 6 batteries fonctionnelles.

1) Le technicien a besoin d'une batterie fonctionnelle. Il effectue des essais successifs selon le protocole suivant : Il choisit une batterie au hasard dans la boîte . Il la teste.

- Si la batterie est fonctionnelle, il arrête son choix.
- Si la batterie est déchargée, il la met de côté et en choisit une autre parmi celles qui restent dans la boîte, jusqu'à ce qu'il trouve une batterie fonctionnelle.

Soit A_n l'événement : « La première batterie fonctionnelle est obtenue au n$^{\text{ième}}$ choix » et p_n sa probabilité. Calculer p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5. (Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles).

2) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque série d'essais, associe le rang (le numéro du choix) de la première batterie fonctionnelle obtenue.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X. Interpréter ce résultat.

3) On s'intéresse maintenant à la durée de fonctionnement (en heures) d'une batterie fonctionnelle neuve. On suppose que cette durée de vie est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

a) On a constaté que la probabilité qu'une batterie fonctionne plus de 100 heures est de 0,8. Déterminer la valeur exacte de λ, puis donner une valeur approchée à 10^{-4} près.

b) On prend pour la suite $\lambda = 0{,}0022$. Sachant qu'une batterie a déjà fonctionné pendant 50 heures sans défaillance, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore au moins 100 heures supplémentaires ? Que remarque-t-on ?

c) Déterminer la fonction de répartition $F_Y(t) = P(Y \leq t)$ de la variable aléatoire Y .

d) Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ de la durée de vie d'une batterie. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 (6.5 pints)

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x - \ln(x)$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \mathrm{e}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n)$.

1) **a)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $]0,+\infty[$, que l'on déterminera. On notera L cette solution.

c) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq 1$.

d) Déterminer le signe de $f(x) - x$ pour $x \in [1,+\infty[$.

2) **a)** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.

b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n).

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) **a)** Montrer que pour tout $x \geq 1$, on a : $\ln(x) \leq x - 1$

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-1=(u_n-1)-\ln(1+(u_n-1))$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}-1}{(u_n-1)}$

Exercice 3 (7 pints)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2-(2+x^2)\,\mathrm{e}^{-x}$.
On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.Interpréter graphiquement

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.Interpréter graphiquement.

2) **a)** Montrer que pour tout réel x , $f'(x)=(x^2-2x+2)e^{-x}$

b) Dresser le tableau de variation de f

3) Montrer que la tangente T à la courbe (C_f) au point O a pour équation cartésienne : $y=2x$

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=f(x)-2x$

a) Étudier le sens de variation de g

b) En déduire la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la tangente T

5) Tracer, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la feuille annexe , la tangente T et la courbe (C_f) .

6) **a)** Vérifier que pour tout réel x , $f(x)=2-f'(x)-2xe^{-x}$

b) A l'aide d'une intégration par parties , montrer que $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x=1-\frac{2}{e}$

c) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-2+\frac{7}{e}$

d) Déduire l'aire $\mathcal{A}$ en unité d'aire , de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) , la tangente T et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$