2013/2014

DEVOIR DE CONTRÔLE N3

MATHEMATIQUES

2 heures

Le sujet comporte quatre exercices répartis en deux pages

EXERCICE 1 : (2 points)

Pour chacune des propositions suivantes, une seule des trois réponses est exacte. Indiquez sur votre copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit $(\Omega , \mathcal{P}(\Omega) , p)$ un espace probabilisé fini. A et B sont deux évènements indépendants tels que : $p(A) = 0{,}2$ et $p(B) = 0{,}7$ alors :

a) $p(A\cup B) = 0{,}9$ b) $p(A\cup B) = 0{,}5$ c) $p(A\cup B) = 0{,}76$

2) Le tableau ci-dessous définit la loi de probabilité d'un aléa numérique X réalisée dans un jeu. Alors

Valeurs prises par X	-2	-1	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{15}{66}$	$\frac{23}{66}$	$\frac{12}{66}$	$\frac{15}{66}$

a) le jeu est perdant b) le jeu est gagnant c) le jeu est équitable

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[1 - e^{\left(\frac{1}{x}\right)}]$ est égale à :

a) 1 b) 0 c) (-1)

4) Le plan étant muni d'un repère orthonormé. Soit P la partie du plan limitée par la courbe de la fonction $f : x \longmapsto e^{-x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la partie P autour de l'axe des abscisses. Alors V (exprimé en unité de volume) est égal à :

a) $\pi(1 - e^{-1})$ b) $\frac{\pi(1-e^{-2})}{2}$ c) $2\pi(1 - e^{-2})$

EXERCICE 2 : (6 points)

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher et réparties de la manière suivante :

$\begin{cases} \textbf{deux} \text{ boules } \textbf{vertes} \text{ numérotées : } \mathbf{1, 1} \\ \textbf{trois} \text{ boules } \textbf{blanches} \text{ numérotées } \mathbf{0, 1, -1} \end{cases}$

I/ On lance, une fois, une pièce de monnaie parfaite :

- Si on obtient « face » on tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.
- Si non on tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.

■ Soit les événements suivants F : « obtenir face » et N : « obtenir une somme nulle »

1) Représenter les données par un diagramme en arbre.

2) a) Calculer : $p(N/F)$ et $p(N/\overline{F})$.

b) En déduire la probabilité d'obtenir une somme nulle.

3) On sait qu'on a obtenu une somme nulle. Quelle est la probabilité d'obtenir « face ».

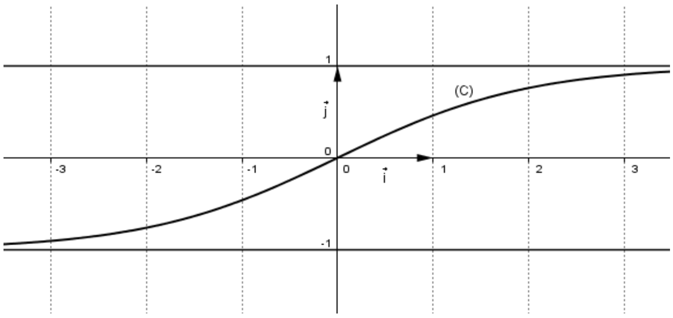
Voir suite au verso

II/ On tire au hasard successivement et avec remise deux boules de l'urne. On désigne par X la variable aléatoire qui indique le nombre de boules blanches obtenu dans chaque tirage.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

EXERCICE 3 : (5 points)

La courbe (C) ci-dessous représente dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ une fonction f définie sur IR par : $f(x)=\frac{ae^x+b}{e^x+1}$ où a et b sont deux réels.



Les droites d'équations : $y=1$ et $y=-1$ sont des asymptotes à (C) respectivement au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

(L'unité graphique : 2cm)

1) a) A l'aide d'une lecture graphique déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

   b) En déduire que : $a=1$ et $b=-1$.

2) Montrer que la fonction f est impaire.

3) a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x)=-1+\frac{2e^x}{e^x+1}$

   b) Calculer, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations : $x=0$ et $x=1$.

   c) En déduire, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite d'équation $y=1$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

EXERCICE 4 : (7 points)

I/ Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x)=(1-x)e^{-x}+1$.

1) Etablir le tableau de variation de la fonction g.
2) En déduire que $g(x)>0$ pour tout réel x.

II/ Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=xe^{-x}+x$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) a) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x)=g(x)$

   b) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

2) a) Montrer que la droite D : $y=x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $(+\infty)$.

   b) Etudier la position de (C) par rapport à D.

3) Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $(-\infty)$ une branche infinie parabolique dont on précisera la direction.

4) Tracer D et (C).

5) Soit $\in IR_+^*$. On désigne par $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite D et les droites d'équations : $x=0$ et $x=\alpha$.

   a) Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α.

   b) En déduire $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

Bon travail