Lycée Rue Ahmed Amara Le Kef ◈ ◈ ◈ Habib Gammar	**DEVOIR DE CONTRÔLE N°3**			
	Mathématiques	4e Sc.Tech	2018-2019	2 Heures

Exercice 1 (7 points)

◆ *Sauf indication contraire, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.*

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.

On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.
On note :

- M l'évènement « le voyageur porte un objet métallique ».
- S l'évènement « le voyageur fait sonner le portique » ;

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

On admet que :

- Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à $0,98$.
- Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à $0,98$.

1) a) À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $p(M)$, $p(S/M)$ et $p(\overline{S}/\overline{M})$.
   b) Construire un arbre pondéré modélisant la situation.
   c) Montrer que $p(S)=0,02192$
   d) Quelle est la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique.

2) 80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité.
   Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.
   a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b) Calculer l'espérance de X (arrondie à l'unité) et interpréter le résultat.
   c) Donner la valeur de :
      - p_1 : la probabilité qu'exactement trois personnes du groupe fasse sonner le portique ;
      - p_2 : la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique.

3) La durée de vie d'un portique de sécurité, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0,4$.
   a) Quelle est la probabilité qu'un portique de sécurité ait une durée de vie comprise entre 2 et 4 ans.
   b) Sachant qu'un portique a fonctionné 3 ans, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 4 ans.

Exercice 2 (8 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-(x+1)e^{-x}+1$.

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que $f'(x)=xe^{-x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que le point $I(1,\ 1-2e^{-1})$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

b) Soit T la tangente à $(\mathscr{C})$ au point I.

Montrer qu'une équation de T est $T: y=e^{-1}x+1-3e^{-1}$

4) Dans la figure de l'annexe ci-jointe on a représenté dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (Γ) de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{-x}$

Construire le point I, la tangente T et la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

5) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J=\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}\,dx=e-2$

b) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, la droite des abscisses et les droites $x=-1$ et $x=0$.

Exercice 3 (5 points)

Dans la figure de l'annexe ci-jointe $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(a+be^{-x})^2$ où a et b sont deux réels positifs.

- $y=1$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.
- T est la tangente à $(\mathscr{C})$ au point $\left(\ln 2, \dfrac{9}{4}\right)$ et de coefficient directeur $-\dfrac{3}{2}$.

1) a) Déterminer $f(0)$, $f'(\ln 2)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Donner une équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $\ln 2$.

2) a) Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Tracer dans le même repère la courbe $(\mathscr{C}')$ de f^{-1}, la fonction réciproque de f

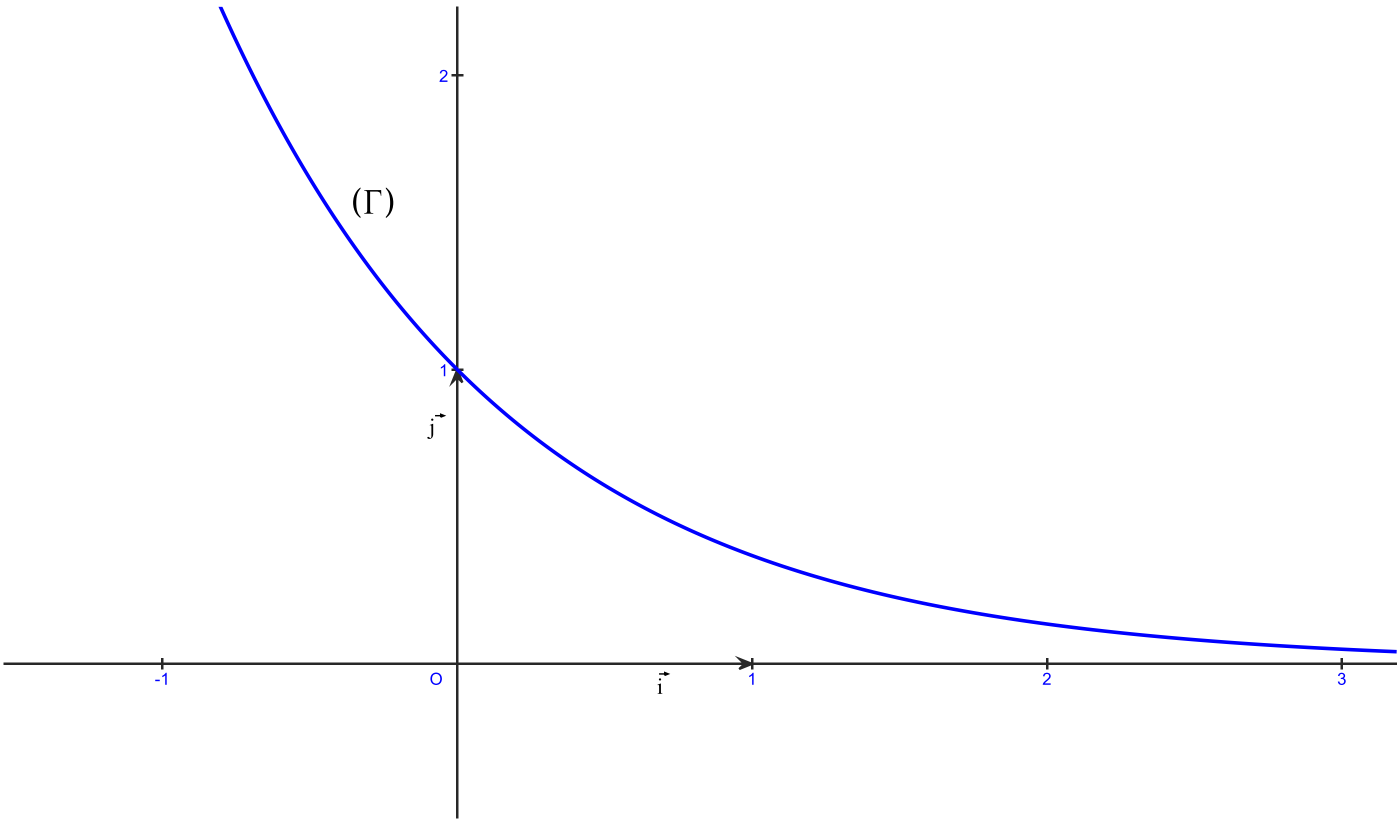
3) Déterminer les valeurs de a et b.

4) On admet que $f(x)=(1+e^{-x})^2$.

Montrer que $\forall x\in]1,+\infty[$, $f^{-1}(x)=-\ln(\sqrt{x}-1)$.

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 2



Exercice 3