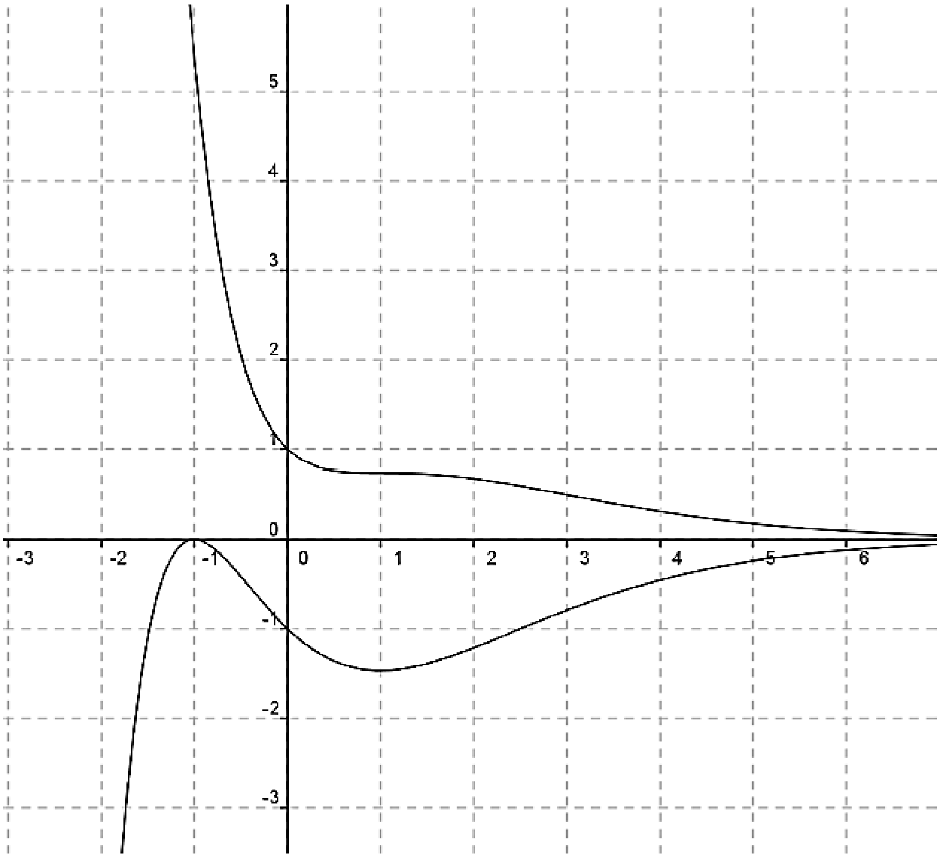
Ministère de l'éducation	*Devoir de contrôle n°3*	Mr. FATNASSI BECHIR
Lycée secondaire de Korba	*Durée deux heures*	4. Tech . Le 18 .4. 2017

Exercice n°1 : **(6 pts)**

On a représenté ci-dessous , dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les courbes (C) et (Γ) représentatives d'une fonction f définie et dérivable sur IR et de sa fonction dérivée f'

1°/ a. En justifiant votre réponse reconnaitre les courbes représentatives de f et celle de f'

b. Par lecture graphique, donner $f(0)$; $f'(0)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$



2°/ La fonction f est définie IR sur par $f(x)=(x^2+1)e^{-x}$

a. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b. Montrer que $f'(x)=-(x-1)^2.e^{-x}$ et dresser le tableau de variation de f.

3°/ Soit α un réel strictement positif.

a . Calculer l'aire de la partie du plan limité par la courbe de f' ,l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=0$ et $x=\alpha$

b . Par une double intégration par parties , calculer $\int_0^\alpha xe^{-x}\,dx$ et montrer que :

$$\int_0^\alpha f(x)\,dx=-(\alpha^2+2\alpha+3)e^{-\alpha}+3$$

c . Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C) ; (Γ) et les droites d'équations $x=0$ et $x=\alpha$.

Calculer $A(\alpha)$ en fonction de α puis calculer $\lim_{x\to+\infty} A(\alpha)$

<u>Exercice n°2</u> : (6 pts)

Soit U la suite réelle définie sur IN* par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{n+1}{2\,n} U_n \quad ; \quad n \geq 1 \end{cases}$

1°/ a / Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$: $U_n > 0$

b / Montrer que U est une suite décroissante.

c / Déduire que U est convergente et calculer sa limite

2°/ On considère la suite V définie sur IN* par $V_n = \dfrac{U_n}{n}$

a / Montrer que V est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b / Exprimer V_n en fonction de n. En déduire que $U_n = \dfrac{n}{2^n}$ pour tout $n \in IN^*$

3°/ Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(x) - x\ln 2$; $x \in [1, +\infty[$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

a / Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

b / Vérifier que $\ln(U_n) = f(n)$.

c / En déduire la limite de la suite U_n

<u>Exercice n°3</u> : (5 pts)

Soit n un entier naturel. On considère la suite intégrale (U_n) définie par :

$$U_0 = \int_0^1 e^t dt \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in IN^* \; ; \quad U_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$$

1°/ a / Vérifier que : $U_0 = e - 1$

b / calculer , à l'aide d'une intégration par partie , U_1

2°/ a / A l'aide d'une intégration par partie sur U_{n+1} montrer que pour tout $n \in IN^*$:

$$U_{n+1} = -1 + (n+1)U_n$$

b / En déduire la valeur de U_2

3°/ a / Montrer que pour tout entier non nul n : $U_n \geq 0$.

b / Montrer que (U_n) est une suite décroissante.

c / Déduire que la suite (U_n) est convergente

d / Montrer que pour tout nombre réel t de $[0,1]$ et pour tout entier non nul n on a :

$$0 \leq (1-t)^n . e^t \leq e.(1-t)^n$$

En déduire un encadrement de U_n puis Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

<u>Exercice N°4</u> : (3 pts)

Cet exercice est un Q.C.M (Questionnaire à Choix Multiples). Chaque question admet une seule réponse exacte : a, b ou c. Pour chacune des questions indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée

<u>Question 1</u>

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x)=\tan(x)$ et S le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe $\mathcal{C}$ de f autour de l'axe (Ox). Alors le volume engendré par le solide S est égal à :

a) $\pi.\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **b)** $\pi\left(\frac{4-\pi}{4}\right)$ **c)** $\left(\frac{4-\pi}{4}\right)$

<u>Question 2</u>

Si f est la fonction définie sur IR par : $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x-\left(\frac{3}{2}\right)^x$ alors la fonction f est :

a) strictement croissante sur IR **b)** strictement décroissante sur IR **c)** constante sur IR

<u>Question 3</u>

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$. Alors $f''(x)=$

a) $f''(x)=e^{-x^2}$ **b)** $f''(x)=-2x\,e^{-x^2}$ **c)** $f''(x)=\int_0^x -2t\,e^{-t^2}dt$

FATNASSI BECHIR