4T2

LYCEE PILOTE MONASTIR

DEVOIR DE CONTROLE N °3

MATHEMATIQUES

2014/2015-**2H**-

Prof :**MOHAMED BENZINA**

EXERCICE 1 (3 PTS)

Répondre par **vrai** ou **faux** à chacune des propositions suivantes . Aucune justification n'est demandée

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{\ln(\sqrt{x})}$, D son ensemble de définition et C sa courbe représentative.

1) On a D =]0, +∞[.
2) La courbe C admet une droite asymptote en +∞.
3) Pour tout $x \in$ D, on a : $f(x)<\frac{x}{2}$.
4) Pour tout $x \in$ D, on a : $f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{x(\ln x)^2}$.

EXERCICE 2 (5 PTS)

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1) On considère la fonction f définie sur [0 ; $+\infty$ [par : $f(x)=x-\ln(1+x)$.
   a) En étudiant les variations de la fonction f, montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x)\leq x$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n)\leq 1$.
2) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n=\ln(u_n)$.
   a) On pose $x=\frac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.
   b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 3 (5 PTS)

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points S(1,1,2), A(-3,0,0) , B(1,0,-2) et C(-1,1,0).

1) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P d'équation : $x-2y+2z+3=0$
2) Soit Q l'ensemble des points M de E vérifiant $\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BS}\right).\overrightarrow{SM}=0$.
   a) Montrer que Q est un plan dont on donnera une équation cartésienne.
   b) Montrer que P coupe Q suivant une droite Δ dont on donnera une représentation paramétrique.
   c) Calculer la distance du point A à la droite Δ .
3) a) Vérifier que SABC est un tétraèdre puis calculer son volume V.
   b) Calculer l'aire ***A*** du triangle SAC puis déduire la distance du point B au plan (SAC).
4) Soit Γ l'ensemble des M(x,y,z) tels que : $x^2+y^2+z^2+7y-2z-9=0$
   a) Montrer que Γ est une sphère dont on précisera le rayon R et les coordonnées de son centre.
   b) Montrer que Γ est une sphère circonscrite au tétraèdre SABC.
   c) Montrer que P coupe Γ suivant un cercle que l'on caractérisera.

EXERCICE 4 (7 PTS)

Soit f la fonction $[0,+\infty[$ définie sur par : $f(x)=\left(e^{-x}-1\right)^2$. On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan(unité : 2cm).

1) a) Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$: $f'(x)=2e^{-x}\left(1-e^{-2x}\right)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Tracer (ζ).

b) Calculer en cm^2 , l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (ζ) et les droites d'équations y = 0, x = 0 et x = 1.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer dans le même repère la courbe (ζ') de la fonction réciproque f^{-1} de f.

c) Calculer en cm^2 l, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (ζ), (ζ') et les droites d'équations : x = 1 et y = 1.

4) a) Montrer que : $\forall x\in[0;1[: f^{-1}(x)=-\ln\left(1-\sqrt{x}\right)$.

b) Montrer que : f^{-1} est dérivable sur $]0;1[$ et déterminer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

5) On pose : $I_\alpha=\int_\alpha^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{x}-x}dx$ où α est un réel de]0 ;1[.

a) Montrer que $I_\alpha=2\ln 2-2f^{-1}(\alpha)$.

b) Calculer : $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I_\alpha$