Lycée Pilote 15octobre1963 - Bizerte	Classe :4ème Sciences techniques₁
Prof: Mme Bayoudh	A.S :2013/2014 — Durée : 2 heures
Devoir de contrôle n °3 en mathématiques	Nom et prénom :

Exercice 1 : (4 points)

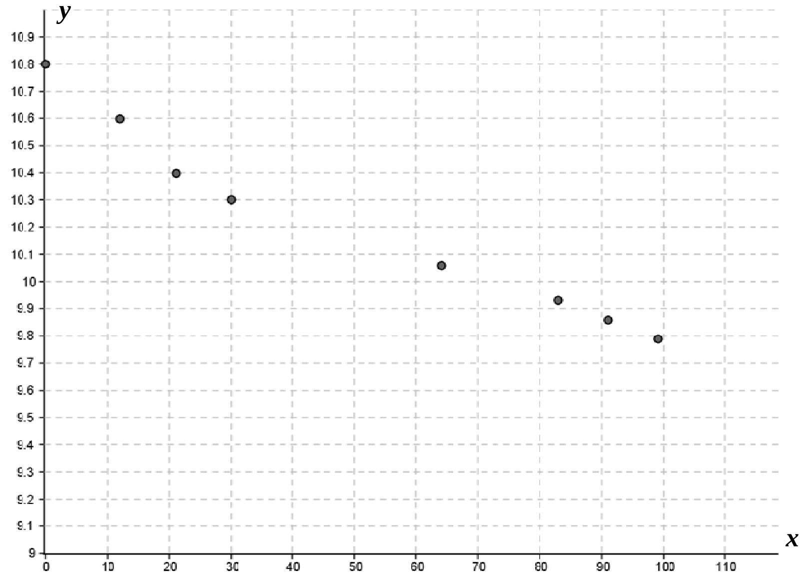
Dans tout l'exercice, le détail des calculs statistiques n'est pas demandé. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} .

On veut étudier l'évolution des records de l'épreuve d'athlétisme du 100 mètres masculin.

Pour cela, on cherche un ajustement des records pour en prévoir l'évolution. On donne dans le tableau suivant certains records, établis depuis 1910.

Année	1910	1922	1931	1940	1974	1993	2001	2009
Rang de l'année : x_i	0	12	21	30	64	83	91	99
Temps en secondes : y_i	10,80	10,60	10,40	10,30	10,06	9,93	9,86	9,79

On a construit le nuage de points M(x_i ; y_i), avec i compris entre 1 et 8, associé à cette série statistique double.



1/ Peut-on envisager un ajustement affine à court terme ?
Cet ajustement permet-il des prévisions pertinentes à long terme sur les records futurs ? Justifier.

2/ Après étude, on choisit de modéliser la situation par une autre courbe. On effectue les changements de variables suivants : $X = e^{-0{,}00924x}$ et $Y = ln\ y$

a) Compléter le tableau suivant :

$X_i = e^{-0{,}00924x_i}$	1	0,895	0,824	0,758	0,554	0,464	0,431	0,401
$Y_i = ln\ y_i$	2,380	2,361	2,342	2,332				

b) Donner une équation de la droite de régression de Y en X obtenue par la méthode des moindres carrés.

c) En déduire que l'on peut modéliser une expression de y en fonction de x sous la forme suivante :

$y = e^{(ae^{-0{,}00924x}+b)}$ où a et b sont deux réels à déterminer.

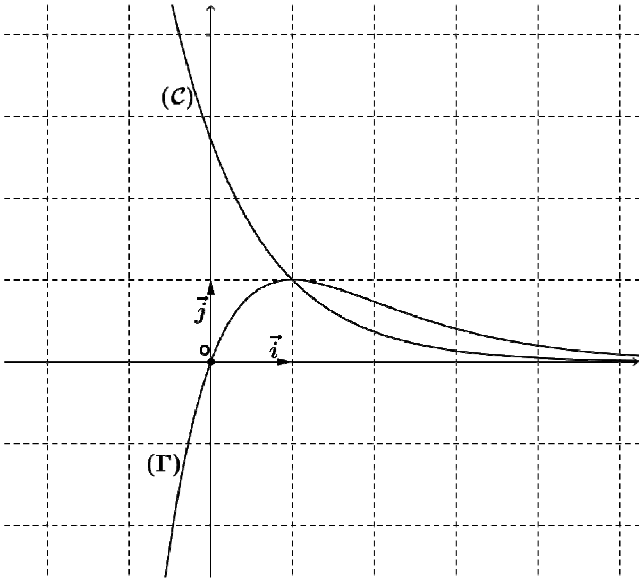
3/ a) A l'aide de cet ajustement, quel record du 100 mètres peut-on prévoir en 2020 ?

b) Pour les valeurs de a et b trouvées , calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(ae^{-0{,}00924x}+b)}$

c) Que peut-on en conclure, en utilisant ce modèle, quant aux records du cent mètres masculin, à très long terme ?

Exercice2 :(6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Les courbes (C) et (Γ) données ci-dessous représentent respectivement, les fonctions f et g définies sur IR par : $f(x) = e^{1-x}$ et $g(x) = xe^{1-x}$.



1) Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est correcte. Aucune justification n'est demandée

a/ ☐ $\int_0^1 g'(x)dx = 1$ ☐ $\int_0^1 g'(x)dx > 1$ ☐ $\int_0^1 g'(x)dx < 1$

b/ La fonction $F: x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est

☐ croissante ☐ décroissante ☐ n'est pas monotone

c/ La suite (u_n) définie par $u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$ est ☐ convergente ☐ divergente

d/ La suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = f(v_n)$ est

☐ croissante ☐ décroissante ☐ n'est pas monotone

2) a/ Soit $\lambda > 1$ .Calculer $I(\lambda) = \int_1^{\lambda}(g(t) - f(t))dt$

b/ Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} I(\lambda)$.

c/ Interpréter graphiquement la valeur de cette limite.

3) Soient A et B les points de la courbe (C) d'abscisses respectives 0 et 1.

On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc AB de courbe comme représenté sur la deuxième figure. On note V son volume.

a/ Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b/ Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$

c/ Justifier que $V = \pi \int_1^e (1 - lnt)^2 dt$

d/ A l'aide de deux intégrations par parties successives , montrer que $V = \pi(2e - 5)$.

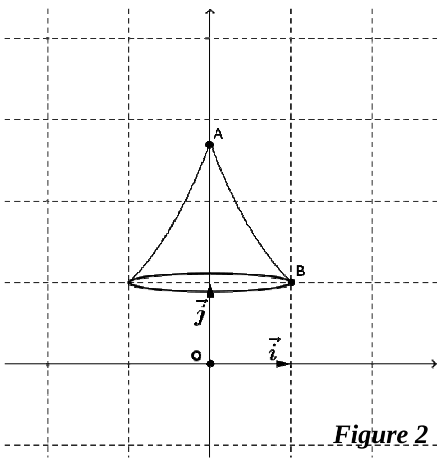


Figure 2

Exercice3 :(10 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x - e^{2x-2}$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On prendra 5 cm comme unité graphique.

1) a/ Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   b/ Montrer que la droite $D : y = x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$.

   c/ Etudier la position relative de (C) et D.

   d/ Etudier les branches infinies de (C) au voisinage de $+\infty$

2) a/ Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

   b/ On notera $I = [0; 0{,}5]$.

   Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle I une unique solution qu'on notera α.

3) a/ Construire la courbe (C) ainsi que l'asymptote D . (On prendra 0,2 comme valeur approchée de α)

   b/ Soit $\mathcal{A}$ l'aire exprimé en cm^2 de la partie du plan limitée par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.

   Montrer que $\mathcal{A} = \frac{25}{2}(\alpha - \alpha^2)$

Partie B

Soit la fonction définie sur IR par : $g(x) = e^{2x-2}$

1) a/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$. En déduire $g(\alpha)$.

   b/ Montrer que pour tout réel x de l'intervalle I on a : $|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$.

2) Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

   a/ Montrer que pour tout $n \in IN$, $0 \leq u_n \leq \alpha$.

   b/ Montrer que (u_n) est croissante. Conclure.

3) a/ Montrer que pour tout $n \in IN$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e}|u_n - \alpha|$

   b/ Déduire que pour tout $n \in IN$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$

   c/ Déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

   d/ Déterminer un entier naturel p tel que $|u_p - \alpha| \leq 10^{-5}$

Bon travail et bonne chance