Lycée Mohamed Ali Professeur : M Fourati	**Devoir de contrôle N°3**	Date : 28/04/2025 Classe: 3Tech1; Durée : 2h

Exercice 1 : (7pts)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1$.

1°/ a- Construire les deux droites $D: y = \frac{3}{4}x + 1$ et $\Delta: y = x$ dans un repère orthonormé

b- En utilisant les deux droites D et Δ représenter les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses

c- Que peut –t-on conjecturer sur la convergence ou la divergence de cette suite (u_n)

2°/ a- Montrer , par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n > 4$

b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(4 - u_n)$

c- En déduire que la suite u_n est décroissante

3°/Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = u_n - 4$

a- Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ et de 1^er terme $V_0 = 2$

b- Exprimer V_n en fonction de n, puis, calculer $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$

4°/ a- Déterminer le terme général de la suite (u_n)

b- Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

5°/ Soit $S_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n} u_k ; n \in \mathbb{N}^*$

a- Calculer S_1

b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $S_n = \frac{4}{n}\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right] + 2\frac{n+1}{n}$.

c- En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Exercice 2 : (6pts)

Soit la suite u définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n+2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

1°/ a- Calculer u_1 et u_2

b- Justifier que la suite u n'est ni arithmétique ni géométrique.

2°/ a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = 3 - \frac{6}{u_n+2}$

b- Montrer, par récurrence, que $0 < u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3°/a- Montrer que la suite u est croissante.

b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$

c- Puis en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{2}{3} < \frac{2}{u_n+2} \leq \frac{4}{5}$

4°/a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - 1| \leq \left(\frac{4}{5}\right)|u_n - 1|$

b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_n - 1| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c- Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$

Exercice 3 : (7pts)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et les trois points $A(1;1;1)$, $B(-1;-1;0)$ et $C(1;0;-1)$

1°/ a- Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonale à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b- En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2°/ On donne par la suite $(ABC): 3x - 4y + 2z - 1 = 0$. Soit le point $D(0;6;-2)$

a- Vérifier que $D \notin (ABC)$

b- Calculer la distance d du point D au plan (ABC)

3°/ Soit le plan $Q: 2x + 4y + 5z + 3 = 0$.

Montrer Q est un plan perpendiculaire au plan (ABC) passant par C.

4°/Soit la droite $\Delta: \begin{cases} x = 3\alpha \\ y = 6 - 4\alpha \\ z = -2 + 2\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$

a- Justifier que Δ est la droite passant par D et perpendiculaire au plan (ABC)

b- Calculer les coordonnées du point H tel que $\Delta \cap (ABC) = \{H\}$

c- En déduire la distance du point B à la droite Δ.

5°/ a- Quelle est la nature du triangle BHD

b- Calculer l'aire du triangle BHD