Devoir de contrôle n°3

Exercice 1 (9 points)

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n+2}{U_n+3} = f(U_n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) **a)** Reconnaitre la coube C de f et donner ses éléments caractéristiques.

b) Représenter sur l'axe des abscisses, les quatres premiers termes de la suite U .

c) Que peut-on conjecturer sur la monotonie et la convergence de U ?

2) **a)** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $-1 \leq U_n \leq 1$.

b) Montrer que U est une suite croissante.

3) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq 1 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1 - U_n)$.

b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

4) On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n+2}{U_n-1}$

a) Montrer que V est une suite géométrique de raison 4. Déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. Déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

5) **a)** Vérifier que $V_n = 1 + \frac{3}{U_n - 1}$.

b) En déduire $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{U_k - 1}$ en fonction de n, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

6) Soient les suites W et T définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} W_0 = 0 \\ W_{n+1} = 4W_n + V_n \end{cases}$ et $T_n = \frac{W_n}{V_n}$.

a) Montrer que T est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer alors W_n en fonction de n.

Exercice 2 (6 points)

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne les points $A(4,2,2)$, $B(5,-2,3)$ et $C(3,2,3)$.
Soit Δ la droite passant par $D(-1,0,-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

1) **a)** Montrer que A , B et C déterminent un plan P

b) Montrer qu'une équation de P est : $2x + y + 2z - 14 = 0$

c) Etudier la position relative de P et Δ

2) **a)** Vérifier que Δ et P sont perpendiculaires en un point H. Déterminer les coordonnées de H .

b) Calculer $d(D,P)$ et $d(A,\Delta)$

3) **a)** Montrer que les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires

b) Calculer le volume v du tétraèdre $ABCD$

c) Retrouver $d(D,P)$

Exercice 3 (5 points)

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

1) **a)** Montrer que $T = \frac{2\pi}{3}$ est une période de g.

b) Montrer que $x = -\frac{\pi}{12}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de g.

c) En déduire un domaine d'étude D de la fonction g.

2) **a)** Dresser le tableau de variation de g sur D.

b) Résoudre dans D, l'équation $g(x) = 0$.

3) Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthogonal, sur $\left[-\frac{3\pi}{4}\,;\,\frac{11\pi}{12}\right]$.